

パスカル数理ゼミからの挑戦状 ～4本先取～

解説

さて、両チームの実力が互角なので、直観的には4勝3敗となる確率の方が大きそうですが、実は戦績が4勝3敗となる確率と4勝2敗となる確率は等しくなります。以下、証明になります。

2チームをA, Bとし, Aを最終的な勝者とします。Aの戦績が4勝3敗または4勝2敗となるには必ず, 3勝2敗もしくは2勝3敗となるときがあるのでここから考えることにします。

(3勝2敗となる確率) = (2勝3敗となる確率) = p とします。

4勝3敗となるには, 3勝2敗からB→Aの順に勝つか2勝3敗からA→Aの順に勝つしかないで、その確率は $p \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + p \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}p$ となります。

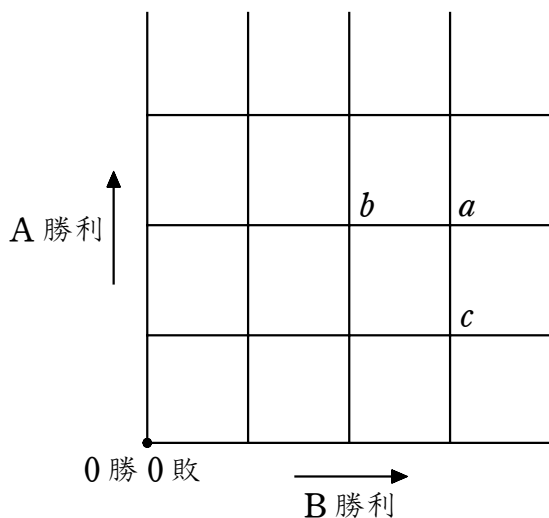
4勝2敗となるには, 3勝2敗からAが勝つしかないで、その確率は $\frac{1}{2}p$ となります。

Bを最終的な勝者とする場合も同様なので、戦績が4勝3敗となる確率と4勝2敗となる確率は等しいことがわかります。また、この考え方により一般に n 本先取において、戦績が n 勝 $n-1$ 敗となる確率と n 勝 $n-2$ 敗となる確率は等しいことがわかります。

念のために、その他の確率もすべて求めてみましょう。こんなときに便利なのが道順の利用です。

【図1】において、Aの1勝が上への移動、Bの1勝が右への移動に対応しており、どちらに進むかは $\frac{1}{2}$ ずつです。よって、交差点にたどり着く確率のうち $a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ が成り立ちます。それぞれの交差点にたどり着く確率をすべて書き入れたものが【図2】になります。ここから、それぞれ戦績の起こりやすさを比にすると、4勝0敗:4勝1敗:4勝2敗:4勝3敗 = $\frac{1}{16} : \frac{4}{32} : \frac{10}{64} : \frac{20}{128} = 2 : 4 : 5 : 5$ となることまでわかります。

【図1】



【図2】

	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{20}{128}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{20}{128}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{64}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{32}$	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	