■ 相加平均と相乗平均の不等関係について,ノンビリ考える。

$\{a_1, a_2\} \subset \{$正の実数$\}$・・・①とするとき

$\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}$・・・※を証明する。

※を証明するには,①から

$\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a_1 a_2}\right)^2$を証明すればよい。

$\Leftrightarrow a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 - 4a_1 a_2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geqq 0$

$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 \geqq 0$・・・※′

$a > 0, b > 0$の条件下において,

$a > b \Rightarrow a^2 > ab > b^2$は成立する。

また,

$$a^2 > b^2$$
$$\Rightarrow (a - b)(a + b) > 0$$
$$\Rightarrow a - b > 0 \quad \because a + b > 0$$

以上から

$a > 0, b > 0$の条件下において,

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$a_1 - a_2$は実数なので, $(a_1 - a_2)^2 \geqq 0$は成立する。(ただし等号成立は$a_1 = a_2$)

※’が成立するので,遡って※は証明された。

$\{a_1, a_2\} \subset \{$正の実数$\}$の条件下において

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2} \quad (\text{等号成立は} a_1 = a_2)$$

が成りたつことを P(2)としよう。

この P(2)を利用して,

$\{a_1, a_2, a_3\} \subset \{$正の実数$\}$とするとき

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$

が成立すること P(3)を証明してみたい。

直ぐに思いつくのが,P(2)に代入してしまうことだと思うが,

$\{a_1, a_2, a_3\} \subset \{$正の実数$\}$とするとき$a_2 + a_3 > 0$であることから

$\{a_1, a_2 + a_3\} \subset \{$正の実数$\}$の条件下において

$$\frac{a_1 + (a_2 + a_3)}{2} \geqq \sqrt{a_1 (a_2 + a_3)} \quad (\text{等号成立は} a_1 = a_2)$$

ここでウンウンうなることになる。P(2)における相乗平均は平方根をとることになるが,

平方根を何度利用したところで 3 乗根は出せないので,困るんだねー。

$\sqrt{\sqrt{\ }}$は 4 乗根だし,$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ }}}$は 8 乗根だからね。これらならできるのだけれど,

角の三等分が幾何学的手法でできないことを考えたときと同じ理由で詰まるわけだ。
ということは,解決の方法も同じということで,解析をしたいんだけれど,
その前にいけるところまでこのまま行ってみよう。

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \{正の実数\}$とするとき$a_1 + a_2 > 0$ かつ$a_3 + a_4 > 0$であることから

$\{a_1 + a_2, a_3 + a_4\} \subset \{正の実数\}$の条件下において P(2)から

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{2} \geqq \sqrt{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)} \quad (等号成立は a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \cdots ②$$

は成立する。

$$(a_1 + a_2) \times (a_3 + a_4) \geqq (2\sqrt{a_1 a_2})(2\sqrt{a_3 a_4}) \quad (等号成立は a_1 = a_2 \wedge a_3 = a_4)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a_1 + a_2)} \times \sqrt{(a_3 + a_4)} \geqq \sqrt{(2\sqrt{a_1 a_2})(2\sqrt{a_3 a_4})}$$

$$\sqrt{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)} \geqq 2\sqrt{\sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}} \cdots ③$$

②③より

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{2} \geqq 2\sqrt{\sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}} \qquad (等号成立は a_1 = a_2 = a_3 = a_4)$$

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \qquad (等号成立は a_1 = a_2 = a_3 = a_4)$$

以上から P(4)は証明された。

$P(2^k)$が成立すると仮定して,$P(2^{k+1})$が証明できれば$k \leqq n$ kは自然数
[1]P(2)は成立することと合わせて,数学的帰納法により $P(2^n)$は真であることが言えるのだが,果たしてできるだろうかね。
[2]

$$P(2^{k+1}):\ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}-1} + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geqq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \ldots a_{(2^{k+1}-1)} a_{2^{k+1}}}$$

を証明したい。
2^k項までなら扱うことができるから

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k})}{2^k} + \frac{(a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^k+2^k})}{2^k} \geqq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^k+2^k}}$$

等号成立条件は$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2^k}$かつ$a_{2^k+1} = a_{2^k+2} = \cdots = a_{2^k+2^k}$ $\because P(2^k) \cdots ④$

$$\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^k+2^k}} \geqq 2\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_{2^k}} \times \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^k+2^k}}}$$

等号成立条件は$a_1 a_2 \ldots a_{2^k} = a_{2^k+1} a_{2^k+2} \ldots a_{2^k+2^k}$ ∵P(2)・・・⑤

④⑤から

$$P(2^{k+1}):\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}-1}+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geqq \sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\ldots a_{2^k}a_{2^k+1}a_{2^k+2}\ldots a_{2^{k+1}}}$$

$a_1=a_2=\cdots=a_{2^k}=a_{2^k+1}=a_{2^k+2}=\cdots=a_{2^{k+1}}$

は証明された。

[1][2]から数学的帰納法により全ての n について

$P(2^n)$が成立することが示された.

$P(2^n)$が成立するとき$P(2^n-M)$ $(1\leqq M<2^{n-1})$が成立することを示してみる。

$$\{a_1,a_2,a_3・・・,a_{2^n}\}\subset\{\text{正の実数}\}$$

$$P(2^n):\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n} \geqq \sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_{2^n}}$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}}{2^n}=A$$

とおく.

$\{a_1,a_2,a_3・・・a_{2^n-M},\{a_{2^n-M+1},\ldots,a_{2^n-M+M}\}\}$の$\{a_{2^n-M+1},\ldots,a_{2^n-M+M}\}$の全ての要素が A に等しいと仮定するとき

$$A=\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-M}+MA}{2^n} \geqq \sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_{2^n-M}.A^M}$$

$$A=\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-M}+MA}{2^n} \Rightarrow (2^n-M)A=\ a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-M}$$

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-M}}{2^n-M}\ ・・・⑥$$

$$A \geqq \sqrt[2^n]{a_1a_2\ldots a_{2^n-M}.A^M} \Rightarrow A^{2^n-M} \geqq (a_1a_2\ldots a_{2^n-M})$$

$$A \geqq (a_1a_2\ldots a_{2^n-M})^{\frac{1}{2^n-M}}\ ・・⑦$$

⑥⑦から

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^n-M}}{2^n-M} \geqq (a_1a_2\ldots a_{2^n-M})^{\frac{1}{2^n-M}}$$

等号成立条件は

$a_1=a_2=\ ・・・=a_{2^n-M}(=A=A=A=\cdots)$

さて,一息つけたので

解析

$\{a_1, a_2\} \subset \{正の実数\}$とするとき

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2} \qquad \mathrm{P}(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} \geqq 0 \text{ を証明すれば良い。}$$

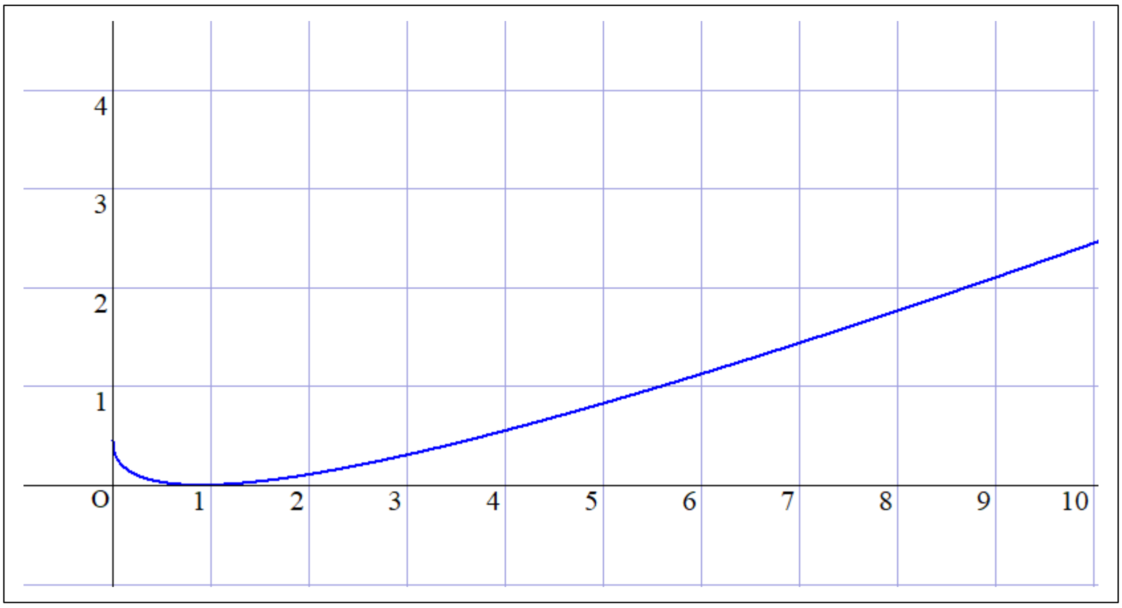
$a_2 = x \quad (x > 0)$と置きなおして

$$f(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2}x - \sqrt{a_1}x^{\frac{1}{2}} + \frac{a_1}{2}$$

$f(x) \geqq 0 \quad (x > 0)$を証明すれば P(2)は言える。

つまり,関数$f(x)$の最小値が,$x > 0$の範囲で 0 以上であればよいので,

$f(x)$のグラフを描きたいわけだ。



この様にパソコンならすんなり書いてくれるわけだが,増減を調べるのに微分が必要なので

数Ⅲまで待つ必要が出てくる。

従って解決方法としては置換でもして次数の低い関数に直すしかないのだが,

$$f(x) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \frac{1}{2}x - \sqrt{a_1}x^{\frac{1}{2}} + \frac{a_1}{2}$$

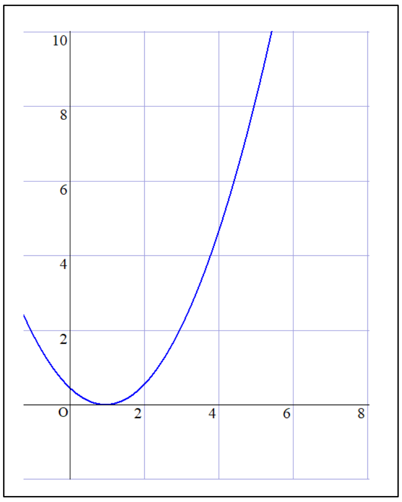
$f(x) \geqq 0 \quad (x > 0)$を証明すれば P(2)は言える。$x^{\frac{1}{2}} = t \quad (> 0)$とおくとき

$$f(x) = \frac{1}{2}t^2 - \sqrt{a_1}t + \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{a_1}\right)^2 \geqq 0$$

さて,

解析を使って

P(2)から P(3)を出せないか考えてみよう。



$\{a_1, a_2, a_3\} \subset \{正の実数\}$とするとき

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$を証明したい。・・・※

P(2)は 2 数までしか扱えないので※を上手く変形したいが

$a_1 > 0$より

$$\frac{1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}}{3} \geqq \sqrt[3]{\left(\frac{a_1}{a_1}\right)\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}$$

$$\frac{1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}}{3} \geqq \sqrt[3]{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}$$

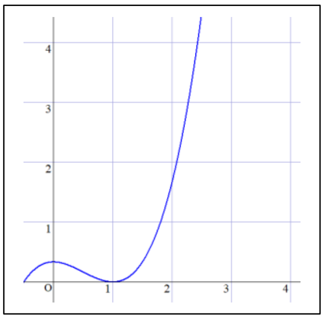
$\dfrac{a_2}{a_1} = s_1, \dfrac{a_3}{a_1} = s_2$とおくとき$\{s_1, s_2\}$は正数

$\{s_1, s_2\}$は正数のとき,$\dfrac{1 + s_1 + s_2}{3} \geqq \sqrt[3]{s_1 s_2}$を証明すればよいことになる。

P(2)から

$\dfrac{1 + s_1 + s_2}{3} \geqq \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{s_1 s_2}$ 等号成立は$s_1 = s_2$

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{s_1 s_2} \geqq \sqrt[3]{s_1 s_2}$を証明したい。



$(s_1 s_2)^{\frac{1}{6}} = \mathrm{t}$ とおけば

$$f(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \qquad (\mathrm{t} > 0)$$

グラフが書ければf(1) = 0より f(t)≧0 は言える。 等号成立は$s_1 s_2 = 1$

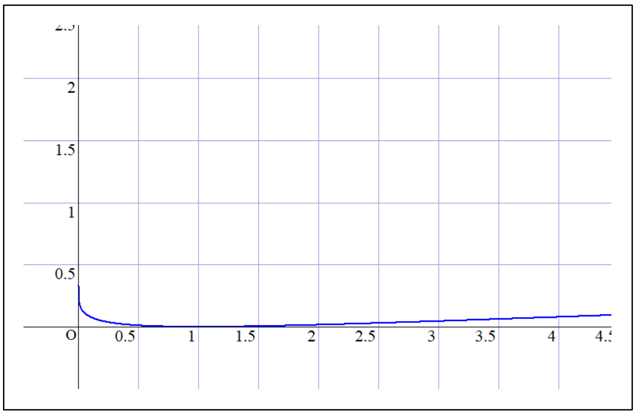
よって

$$\frac{a_2}{a_1}=s_1,\frac{a_3}{a_1}=s_2,s_1s_2=1\text{ を満たすのは}a_1=a_2=a_3$$

$$\text{少し戻って}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{s_1s_2}\geqq\sqrt[3]{s_1s_2}$$

$$f(t)=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\qquad(\mathrm{t}>0)$$

とした場合には数Ⅲ範囲となる。
微分して増減を調べて
最小値が 0 以上であることを示せば
よいことになる。



さて,考え方はこれくらいにしておこう。面白いと思える人はレアだろうし,

まぁ,君たちが数学の問題で解くときは,

$f(x)=x+\frac{1}{x}\quad(x>0)$の最小値を求めよ。

的な問題で使うことが多いですかね。
小学生で言うところの正比例のグラフと反比例のグラフを足し合わせただけなので,
大雑把に形は分かると思いますが,最小値がどこかと言われると,ある程度正確にグラフがかけないとだめですね。置換で 2 次関数に・・・といった考え方は・・・

$$f(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2$$

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=t$ 結局 t の範囲(最小値)を求めることになり振り出しにもどります。

こういうときに$x>0,\frac{1}{x}$>0 を確認した上で

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\times\frac{1}{x}}=2\quad\left(\text{等号成立は}x=\frac{1}{x}\text{より}x=1\right)$$

まぁ要するに

$a > 0, b > 0$のとき　$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$

$a + b$が 4 ならば　　$4 \geqq 2\sqrt{ab}$

$$\sqrt{ab} \leqq 2$$

$\sqrt{ab}$が 2 以下であることがわかるというだけです。

この段階では$\sqrt{ab}$ is less than or equal to 2

最大値の 2 を取るかもしれないくらいしか分かっていませんが,

特に$a = b = 2$のとき,等号が成立するので,

$\sqrt{ab} = 2$となり,最大値 2 が存在することが確認されました。

同じようにに$ab = 4$と積が分かっているとき

$a + b \geqq 2\sqrt{4}$,$a + b \geqq 4$であることが分かります。等号成立条件を調べれば,

$a = b = 2$のとき,最小値 4 に等しいことが分かります。

もしグラフが書けない場合でも,もしかしたら最小値を出せるかもしれない手段として不等式を頭にいれておきましょう。

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$　$(x > 0)$の最小値を求めよ。

まぁ折角なので,x のところに$x - 2 > 0$などを代入して問題を作り変えてみますか

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 2} \quad (x > 2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \quad (x > 2)$$

$$f(x) + 1 = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} + 1 \quad (x > 2)$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \quad (x > 2)$$

$g(x)$について最小値を求めよ。このように問題を作り変えることはカンタンです。

テキトーに自分で遊んでみましょう。答えが明らかに出せる問題から出発しましょうね。

証明方法はまだありますが,既に見せているものが多いので省略します。

凸不等式などまだ教えていない道具もありますからね。

$P(n)$が成立するとき

$\{a_1, a_2 \dots, a_n\} \subset$ {正の実数}とするとき

$\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \dots, \frac{1}{a_n}\right\} \subset$ {正の実数}を満たす

よって

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \geqq \left(\frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_2}\ \dots \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

従って

$$\frac{a_1+a_2+a_3 \dots a_n}{n} \geqq \left(\frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_2}\ \dots \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

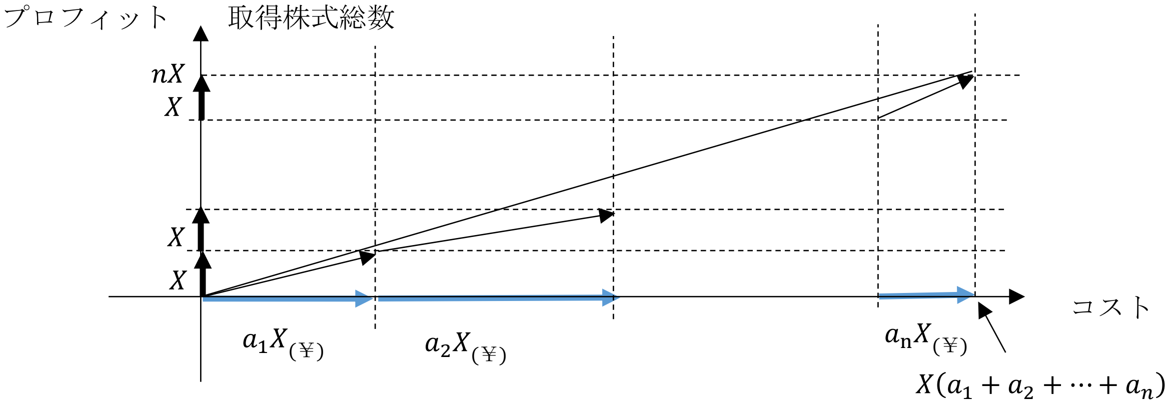
相加平均≧　　　相乗平均　　≧　調和平均

の関係はP(n)によって証明される。

じゃぁこれを使ってみようか。

$\{a_1, a_2 \dots a_n\}$を日経平均株価とする。

プラン A　毎月, 定口数(X)を購入する計画を立てると,



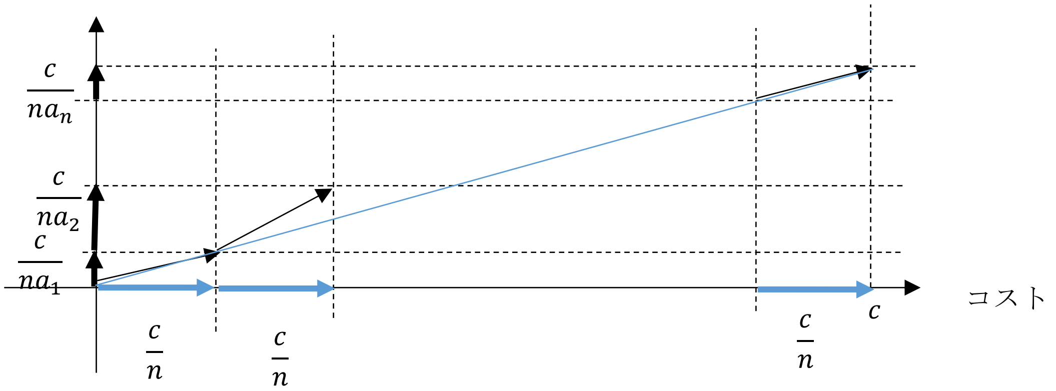
P/C は　(得たもの/払ったもの)なので, 費用対効果, コスパ,　効率と言えますね。

平均効率はグラフでいうところの傾き

$$P/C = \frac{nX}{X(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

になります.

プランＢ　定額購入 毎月 $\frac{c}{n}$円購入すると



平均効率は

$$P/C=\frac{\frac{c}{na_1}+\frac{c}{na_2}+\cdots+\frac{c}{na_n}}{c}=\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$$

になりますから,

$$\frac{a_1+a_2+a_3\ldots a_n}{n}\geqq\left(\frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_2}\ \cdots\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}\geqq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

相加平均≧調和平均であることを利用して

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}(Aプラン平均効率)\leqq\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}(Bプラン平均効率)$$

であることがわかるでしょう。
このＢプランの投資方法をドルコスト平均法といいますが,
必勝法ではありません。より損を少なくする為の基本となる投資法というだけでございます。
このように少しでも効率よく,よりリスクを少なくする為に,不等式は使われたりするわけです。
もっと効率のいい方法はないのか,勉強を続け,考え続けられない人は,金融,投資関係のお仕事は危険かもしれません。お仕事ではなくギャンブルになってしまいますからね。

あとは,車の速度と燃費を考え,ガソリン代と移動距離などでも使うことができるでしょう。
より金銭効率のいいドライブプランなどを考えてもいいと思います。
長期的にコストを払って,対価を得る計画を練るとき,この考え方は重要になりますね。

さて, そろそろ数学関連の文章も読むことができるようになっているでしょうから

線形計画法

三角不等式

相加平均≧相乗平均≧調和平均

コーシー・シュワルツの不等式

凸不等式

イェンセンの不等式

非負実数 x,y,z と正数 t に対して成り立つ、次の絶対不等式である。

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-x)(z-y)\geq 0$$

等号成立は $x=y=z$ のとき、または x,y,z のいずれかが 0 で残り 2 つが等しいときのみ。また、t が正の偶数の場合はすべての実数 x,y,z について不等式が成り立つ。

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-x)(z-y)\geq 0$$
$$f(x,y,z)=f(y,x,z)=f(z,y,x)=f(x,z,y)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$$

$$x=y\text{かつ}x=z\text{のとき},f(x,y,z)=0$$

よって

$$f(x,y,z)=\{x^t(x-y)+z^t(z-x)\}\{(x-z)+(z-y)\}-x^t(x-y)(z-y)-z^t(z-x)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)$$
$$f(x,y,z)=\{x^t(x-y)+z^t(z-x)\}(x-y)+(y^t-x^t)(y-x)(y-z)+z^t(z-x)^2$$