■ピープス氏からニュートンへの手紙

（確率、そして二項分布）

サミュエル・ピープス（Samuel Pepys, 1633 年 2 月 23 日～1703 年 5 月 26 日）は、17 世紀に活躍したイギリスの官僚。王政復古の時流に乗り、一平民からイギリス海軍の最高実力者にまで出世した人物であり、国会議員及び王立協会の会長も務めた。今日では詳細な日記で知られているが、官僚としての業績も大きく、王政復古後の海軍再建に手腕を発揮したことにより「イギリス海軍の父」とも呼ばれている。（Wikipedia より）

そんなピープス氏が 1693 年にニュートンに宛てた手紙の中で次の質問をしたそうです。

> 次の３つのうち起こる頻度が最も高いのはどれでしょうか。
>
> **6** 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 1 個でる
> **12** 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも **2** 個でる
> **18** 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも **3** 個でる

この質問にどのように答えたらよいでしょうか？

「6 個に対して 6 の目が少なくとも 1 個の割合」だから、これら 3 つとも同じでしょうか。それとも投げる個数が多い方が 6 の目が出るチャンスが多い、と考えられるでしょうか。それとも・・・。

6 個のサイコロを投げて、6 の目が 0 個、1 個、2 個・・・6 個でる確率は、それぞれ

「${}_6C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^6, {}_6C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^5, {}_6C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4, {}_6C_3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^3, {}_6C_4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^2, {}_6C_5(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^1, {}_6C_6(\frac{1}{6})^6(\frac{5}{6})^0$ 」（＊）

となります。

たとえば「6 個のサイコロを投げて 6 の目が 2 個でる確率・・・（＊＊）」を求めるなら、

6 個のサイコロのうちどの 2 個が 6 の目かで ${}_6C_2$ 通りあり、6 の目が 2 個でる確率が$(\frac{1}{6})^2$、

残りの 4 個のサイコロは 6 以外の目がでなければならないから、その確率は$(\frac{5}{6})^4$ です。

したがって（＊＊）の確率は ${}_6C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4$ となります。

＊確率を「かける」ということには注意が必要なのですが、ここでは、ある一つのサイコロが６の目であるという事象と、他のひとつのサイコロが６の目であるという事象は「独立」だから、とだけ言っておきます。

ところで（＊）の確率を眺めて何かを思い出しませんか？

$a=\frac{1}{6}, b=\frac{5}{6}$　とおいて、これらの和を考えると

$(a+b)^6$

$={}_6C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^6+{}_6C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^5+{}_6C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4+{}_6C_3(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^3+{}_6C_4(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^2+{}_6C_5(\frac{1}{6})^5(\frac{5}{6})^1+{}_6C_6(\frac{1}{6})^6(\frac{5}{6})^0$

となります。二項定理ですね。

そして、これらの分布を考えたものを「二項分布」と呼んでいます。

ピープス氏の質問に答えるためには、これらの確率、つまりは「二項分布」を考えなければいけないのです。

しかし、そのとき、一つ難点があります。計算が厄介なのです。

${}_{18}C_8(\frac{1}{6})^8(\frac{5}{6})^{10}$　・・・☆　などの計算を手計算で行ってみれば実感できると思います。

（ニュートンは、おそらく、これらを手計算で求めました。）

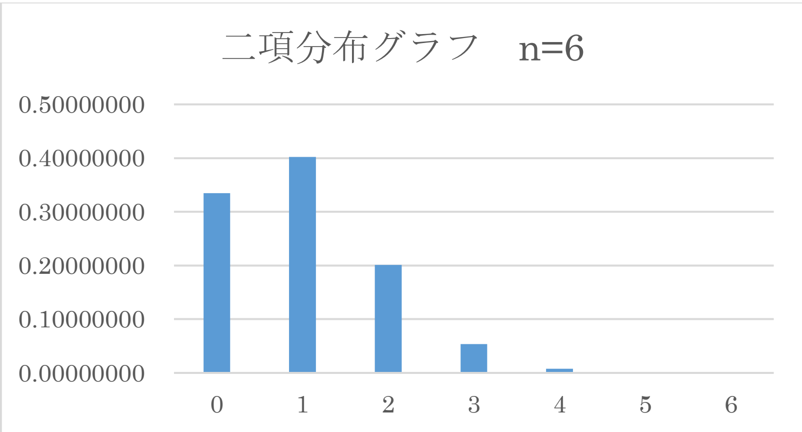
ところが、今では関数電卓やExcelを使えば一瞬で計算ができます。
☆の値が知りたければ、Excelならば、
＝BINOM.DIST(成功数,試行回数,成功率,FALSE)
具体的には、
＝BINOM.DIST(8,18,1/6,FALSE) と入力すればあっという間に結果が得られます。
便利なものです。

＊ちなみにBINOM.DISTは二項分布(binomial distribution) のことです。

これを使って計算してみましょう。

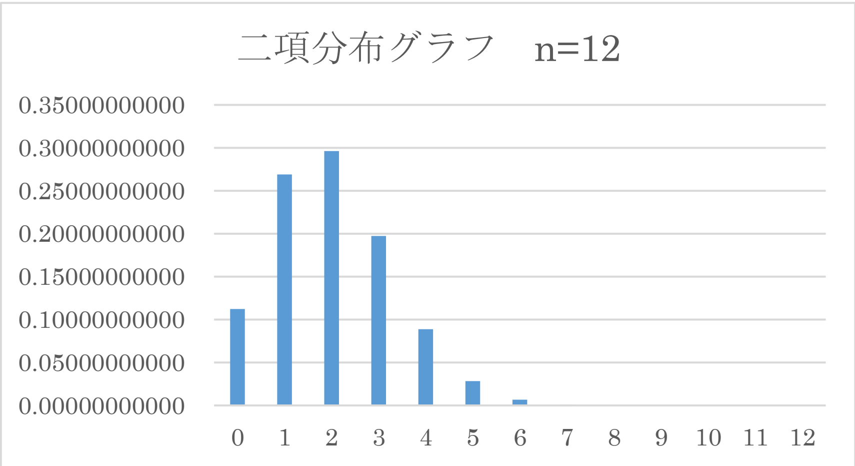
「6 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 1 個でる」確率は以下の表の「★」の和で、余事象を考えれば、　1 －　0.33489798　≒　0.66510202　となります。

6 の目が出る回数	確率	
0	0.33489798	
1	0.40187757	★
2	0.20093879	★
3	0.05358368	★
4	0.00803755	★
5	0.00064300	★
6	0.00002143	★



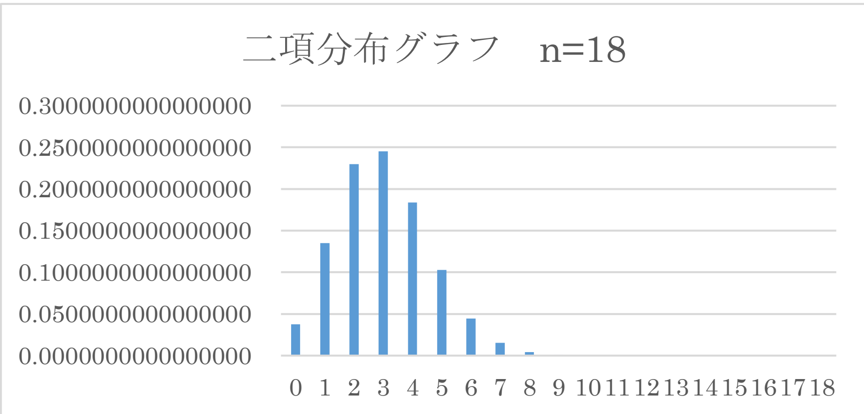
「12 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 2 個でる」確率は以下の表の「★」の和で、余事象を考えて　1－0.11215665－0.26917597 ≒ 0.61856738　となります。

6 の目が出る回数	確率	
0	0.11215665478	
1	0.26917597148	
2	0.29609356863	★
3	0.19739571242	★
4	0.08882807059	★
5	0.02842498259	★
6	0.00663249594	★
7	0.00113699930	★
8	0.00014212491	★
9	0.00001263333	★
10	0.00000075800	★
11	0.00000002756	★
12	0.00000000046	★



「18 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 3 個でる」確率は以下の表の「★」の和で、余事象を考えて　1－0. 03756104－0. 13521973 －0. 22987323 ≒ 0. 59734600　です。

6 の目が出る回数	確率	
0	0.0375610367586079	
1	0.1352197323309880	
2	0.2298735449626800	
3	0.2451984479601920	★
4	0.1838988359701440	★
5	0.1029833481432810	★
6	0.0446261175287550	★
7	0.0153003831527160	★
8	0.0042076053669969	★
9	0.0009350234148882	★
10	0.0001683042146799	★
11	0.0000244806130443	★
12	0.0000028560715218	★
13	0.0000002636373712	★
14	0.0000000188312408	★
15	0.0000000010043328	★
16	0.0000000000376625	★
17	0.0000000000008862	★
18	0.0000000000000098	★



以上より、ピープス氏の質問への答えは
①　6 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 1 個でる確率が 0.665
② 12 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 2 個でる確率が 0.619
③ 18 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 3 個でる確率が 0.597 となり
「①の確率が一番高い」となります。

皆さんの「直感」はどうだったでしょう？

ちなみにピープス氏は「③18 個のサイコロを投げて、6 の目が少なくとも 3 個でる」場合の確率が一番高いと思っていたようで、そう思って賭けをしたので負けが込み、結局賭けをやめることになったそうです。

（参考）ピープス氏に関しては『ピープス氏の秘められた日記』臼田昭　岩波新書　1982 年
という興味深い本があります。

この二項分布のグラフは、じっくり見てみるといろいろな発見があります。
たとえば、
 6 個投げて 6 の目が 1 個でる確率は 0.401
12 個投げて 6 の目が 2 個でる確率は 0.296
18 個投げて 6 の目が 3 個でる確率は 0.245
同じ確率ではありませんね。

また、サイコロを 18 個投げると、目は全部で 6 つあるので「同じ目が 3 個でる確率が一番高くなりそうだ」と予想できますが、では「2 個しかでない確率」と「4 個でる確率」はどちらの確率が高いでしょうか？
先ほど計算した表を見てみると、
18 個投げて 6 の目が 2 個でる確率は 0.230
18 個投げて 6 の目が 4 個でる確率は 0.184
となっていて 2 個でる確率の方が高いですね。
これは、なんとなく「そうだよなあ」と理解できそうです・・・か。

確率的な思考は今からますます重要になってきます。
みなさん、楽しもう！

（注）確率は大学入試までは通常「分数」で表現しますが、ここでは「小数」で表した方がわかりやすいので「小数」で書いています。確率ですから 0 から 1 の間の数であれば「分数」でも「小数」でも問題ありませんよね。