「A が起こったという条件のもとで、B が起こる確率」
ことばを換えて言うと
「A についての情報が得られたとき、B が起こる確率」
これを「条件Ａの下での条件付き確率」といい、$P_A(B)$であらわします。

そして、この「条件付き確率」が大学入試の世界で“有名”になったのは 1976 年、早稲田大学で出題された次の問題からではないだろうかと、その当時の入試問題を直接体験した者としては思っています。

> 【1976 年 早稲田大学】
>
> 5 回に 1 回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が、正月に A,B,C の 3 軒をこの順に年始回りして家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた。
> 2 軒目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。

このような「条件付き確率」の考えにくさは「時間をさかのぼらなければならない」ことにあります。

時間の流れに沿って考えると、

自宅を出発し→家Ａを訪問（家Ａで 帽子を忘れる確率は $\frac{1}{5}$ 、忘れない確率は $\frac{4}{5}$ ）

→家Ｂを訪問（家Ａで帽子を忘れず家Ｂで忘れる確率は $\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ 、

　家Ａでも家Ｂでも帽子を忘れない確率は $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ ）

→家Ｃを訪問（家Ａでも家Ｂでも帽子を忘れず家Ｃで忘れる確率は $\frac{16}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$ ）
というように、順に確率をかけていけばいい。

ところが、この問題は年始回りが全て終わって家に帰ったとき、帽子を忘れてきたことに気がついた！そのとき「時間をさかのぼって」家 B で忘れてきた確率は？と問われています。このように全てが終わった時点からさかのぼって確率を考えることから、このような種類の「条件付き確率」は「原因の確率」とも呼ばれています。

さて、年始回りが全て終わって帽子を忘れてきたことに気が付いたわけですから
「帽子を忘れずに家に帰ってくる・・・(＊)」という可能性が消えたということです。

（＊）の確率は $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$ ですから、この可能性が消えました。

すると「3 か所の家のうちのどこかで帽子を忘れてくる」という確率　$1-\frac{64}{125} = \frac{61}{125}$

を全事象として考えることになります。したがって求める確率は、
（家 B で帽子を忘れてくる確率）÷（どこかで帽子を忘れてくる確率）を計算して

$\frac{4}{25} \div \frac{61}{125} = \frac{20}{61}$ となります。(答)

3 軒のうちのどこかで忘れたのだから「 $\frac{1}{3}$ ではないだろうか」という意見もありそう

ですが「家 A で帽子を忘れる確率（ $\frac{1}{5}$ ）」「家 B で帽子を忘れる確率（ $\frac{4}{25}$ ）」

「家 C で帽子を忘れる確率（ $\frac{16}{125}$ ）」が等しくはないので、そうではありませんね。

さらに、もし K 君が 3 軒の訪問から帰ってきた後、帽子を忘れてきたことに気が付いていなければ確率はどうなるのだろうかと考えると・・・。
帽子を忘れずに帰ってきたという可能性も残っているわけですから

$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ となり、ぐっと確率は下がります。

つまり、「A についての情報が得られたとき、B が起こる確率」が条件付き確率で、この場合の A は「全てが終わったときに帽子を忘れてきたことに気がついた」であり、B は「家 B に帽子を忘れてきたこと」ですが、この情報 A が得られたことで確率が「変わる」(再評価すると言った方が正確ですが、情報によって確率が変化する)、これが条件付き確率の面白いところだと思うのですが、どうでしょう？

以下は余談です。
コロナ後の社会はそれ以前とはずいぶん変化したものになりそうだと多くの人によって指摘されています。その変化した社会では AI が社会の隅々まで行き渡るだろうと予想されてもいます。そんな AI を設計するときにとても親和性があるのが、この「条件付き確率」の考え方なのです。近年再び脚光を浴びている考え方に「ベイズ統計学」がありますが、これがまさに「条件付き確率」なのです。

情報が与えられることによって「確率」が変化する（再評価する）という方法は、そこからさらに進めば、情報を随時アップデートしていくことによって推定する値（確率）もそれに合わせて更新していきその精度を高めることが可能になります。
その方法を「ベイズ更新（Bayesian updating)」といい AI の学習技術である「機械学習」や「ディープラーニング」と親和性があるのです。
機会があれば、「ベイズ更新」についてこの HP にアップしたいと思いますが、興味がある人は自分で調べてみると面白いですよ。

『完全独習　ベイズ統計学入門』小島寛之　ダイヤモンド社

『史上最強図解　これならわかる！ベイズ統計学』涌井良幸　ナツメ社

『図解・ベイズ統計「超」入門』涌井貞美　サイエンス・アイ新書

などはお勧めです。

回り道はそれくらいにして、本題に戻ります。

次の問題はどのように考えればよいでしょうか？

【問題】 小針 晛宏（こはり あきひろ）著『確率・統計入門』岩波書店より

3 つの部屋があり、そこにはそれぞれ「女性 2 人」「男性 2 人」「男女各 1 人」が入っている。1 つの部屋をノックしたところ女性の声で‘誰か来たわよ、あなた出てちょうだい’と聞こえた。男性が出てくる確率はいくらか。

まず誰かが「1 つの部屋をノックした」とき、返事をする可能性はこの 6 人全員にあると考えます。
そこで「女性 2 人」の部屋を A、「男性 2 人」の部屋を B、「男女各 1 人」を C としましょう。すると（A 女$_1$）（A 女$_2$）（B 男$_1$）（B 男$_2$）（C 男）（C 女）の 6 人が同じ割合で返事をする可能性を持っていることになります。同様に確からしい。
次に「女性の声で‘誰か来たわよ、あなた出てちょうだい’」という声が聞こえたのですから「女性が返事をするという事象」を F とするとそれは（A 女$_1$）（A 女$_2$）（C 女）の 3 つの場合からなります。そしてその確率は $P(F)= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

求める確率は F を前提として（F という条件の下で）その部屋が C（女性の声がして、男性が出てくるのは部屋 C の男）である確率 $P_F(C)$ということになります。

したがって、
$P_F(C)$ = (C 男が出てくる確率)÷(Fの確率)

$= \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ となります。(答)

「1 つの部屋をノックしたところ女性の声で‘誰か来たわよ、あなた出てちょうだい’と聞こえた。」という条件が無ければノックして男性が出てくる確率は $\frac{1}{2}$ ですよね。

つまり「ノックして女性の声がした」という条件によって「男性が出てくる可能性」は $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{3}$ に下がったということです。

では、この条件の下で「女性が出てくる確率は」と聞かれたら、
$P_F(A)$ = (A 女$_1$または A 女$_2$が出てくる確率)÷(Fの確率)

$= \frac{2}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ となります。

それでは最後にちょっと古い大学入試問題を解いてみてください。

【1987 年　自治医大】

3 枚のカードのうち、1 枚目のカードは両面とも赤色、2 枚目は両面とも白色、残りの 1 枚は片面が赤色で、その裏は白色である。これら 3 枚のカードの順序も表裏もでたらめにして 1 枚を取り出したら、一つの面が赤色であった、その裏が白色である確率を求めよ。

先ほど説明した問題と同じだと気が付いたでしょう！

そうです。確率は $\frac{1}{3}$ ですね。