■背理法の“もやもや”をスッキリと！

全国の大学入試問題を眺めてみると「証明せよ」「示せ」「理由を述べよ」など論証問題が数多く出題されています。問題を解く側からすると、いやだな～という感触を持つ人も多いのではないかと思います。
実際、夏休みの課題で証明問題だけ後回しにして、そこだけ白いまま残っているというケースをしばしば目にします。
しかし、じっくり考えると、とても興味深い問題がたくさんあります。
後回しにしないで楽しんでほしいと思います！

今回は「背理法」の話です。
「対偶をとって証明する方法との違いがよく分からない」
「なんか証明した気分になれない」（う～ん、これはどういう気分なのでしょう・・・）
そんな“もやもや”を少しでも解消したいと思います。

「背理法」と聞くとまず「$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ」

という問題が頭に浮かぶのではないでしょうか。

$\sqrt{2}$が無理数ではないと仮定すると、有理数だから…

このように証明は書き始めることになります。
ところが、この部分に“もやもや”感が残る人がいます。
「無理数ではないからといって、有理数だとは言えないのでは？」という疑問です。
「実数かどうかも怪しいのでは？」という疑問があるのです。
しかし、この場合$\sqrt{2}$は実数であるということを前提していると理解してください。

この証明の核心は「無理数でなければ有理数である」という部分です。
このように「A か、A でないか、のどちらかであって、その中間はない」ということを論理学の言葉では「排中律」と言い、そのことにこの証明は支えられています。

簡単に証明をかいてみましょう。

（実数）$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、有理数だから

$\sqrt{2} = \dfrac{b}{a}$ （a,bは互いに素な整数）とおける.

分母を払って両辺を2乗すると$2a^2 = b^2$ …①となる

①の左辺は偶数だから、右辺のb^2も偶数になる.したがってbも偶数.

するとb = 2m（mは整数）とおけて、これを①に代入して両辺を2で割ると

$a^2 = 2b^2$ となり、同様の論理でaも偶数となるが、これはa,bが互いに素であるという仮定に矛盾する.

このことは$\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定が間違っていることを示していて、$\sqrt{2}$ は有理数ではないといえる.

したがって（実数は有理数でなければ無理数だから）$\sqrt{2}$ は無理数である.

背理法に関係する“もやもや”は上で示したような

「命題Ａが真であることを証明する」タイプのものよりも、

「命題“pならばq”（$p \Rightarrow q$）が真であることを証明する」ために

「“pならばq”（$p \Rightarrow q$）という命題」を否定して背理法を使おうとする場合に発生するようです。何を否定すればよいのかなど、論理構造があいまいになってしまうのです。

そのタイプの背理法の構造を書いてみましょう。

１．命題 ”pならばq ”（$p \Longrightarrow q$）を否定する。
　　論理の記号で書くと、”pかつqでない ”（$p \wedge \overline{q}$）…これは重要！
2. 議論をすすめる
3. 矛盾が生じる
4. 仮定が間違っていることがいえる

3.は「何に矛盾するか」で3つのパターンがあります。

ｉ）命題 ”pならばq ”（$p \Longrightarrow q$）には直接関係ない「数学的に真であること」に矛盾

ⅱ）qでない（$\overline{q}$）ことに矛盾

ⅲ）ｐに矛盾

そして、ⅲ）は対偶命題 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が示されたことになります。

つまり、「対偶をとって証明する方法」は背理法のひとつの場合ということがいえます。

１題解いてみましょう。

a,bが有理数のとき、$a+b\sqrt{2}=0$ ならば$a=b=0$であることを証明せよ.
ただし $\sqrt{2}$ は無理数である.

（証明）

a,bが有理数のとき、$a+b\sqrt{2}=0$ …① かつ「$a\fallingdotseq 0$ または $b\fallingdotseq 0$」と仮定すると

$b\fallingdotseq 0$のとき $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$ …② となる

a,bは有理数だから②の右辺は有理数、ところが左辺は無理数で矛盾する
したがって$b\fallingdotseq 0$とした仮定が誤りで、$b=0$である
このとき①より$a=0$
ゆえに、a,bが有理数のとき、$a+b\sqrt{2}=0$ ならば$a=b=0$である

これは「有理数と無理数が等しくなることはない」という「数学的に真である」ことに矛盾したということです。

どうでしょうか。すこしは“もやもや”が晴れたでしょうか。
最後に入試問題を解いてみましょう。
1995 年にワイルスが 350 年間解決しなかった「フェルマーの最終定理」を証明しました。その 3 年後信州大学がそのことを話題にした入試問題を出題しました。はじめて問題を読んだときはドキッとしましたが、背理法を使って証明する（普通の）問題でした。出題者のこだわりが感じられる問題です。面白いと思いました。

「n を 2 より大きい自然数とするとき $x^n+y^n=z^n$ を満たす整数解 x , y , z($xyz\neq 0$)は存在しない」というのはフェルマーの最終定理として有名である.しかし多くの数学者の努力にもかかわらず一般に証明されていなかった.ところが 1995 年この定理の証明がワイルスの 100 ページを超える大論文と,テイラーとの共著により与えられた.
当然 $x^3+y^3=z^3$ を満たす整数解 x , y , z($xyz\neq 0$)は存在しない.

さてここではフェルマーの定理を知らないものとして次を証明せよ.

x , y , z を 0 でない整数とし、もしも等式 $x^3+y^3=z^3$ が成立しているならば, x , y , z のうち少なくとも一つは 3 の倍数である.

証明は簡単です。
x, y, z を 0 でない整数とし、等式 $x^3 + y^3 = z^3$ ・・・① が成立しているとき
x, y, z の全てが 3 の倍数ではないと仮定すると、
$x = 3p \pm 1$, $y = 3q \pm 1$, $x = 3r \pm 1$ （p, q, r は整数）とおける
すると x^3, y^3, z^3 を 9 で割った余りは 1 または 8 となるが
$x^3 + y^3$ を 9 で割った余りは
$1 + 1 \equiv 2$
$1 + 8 \equiv 9 \equiv 0$
$8 + 8 \equiv 16 \equiv 7$ となり
① の右辺の z^3 を 9 で割った余りが 1 または 8 であることと矛盾する。
これは x, y, z の全てが 3 の倍数ではないとした仮定が間違っていることを示している。
したがって、x, y, z を 0 でない整数とし、もしも等式 $x^3 + y^3 = z^3$ が成立しているならば, x, y, z のうち少なくとも一つは 3 の倍数であるといえる。（＊）

もしもフェルマーの最終定理がまだ証明されていなかったら、この結果（＊）はこの定理の証明のための大きなヒントになったかもしれないですね。

さらに、この入試問題の
「さてここではフェルマーの定理を知らないものとして次を証明せよ」
という但し書きについてです。

証明すべき命題はこれです
「もしも等式 $x^3 + y^3 = z^3$ が成立しているならば, x, y, z のうち少なくとも一つは 3 の倍数である」

ところがこの命題の仮定（下線を引きました）は、フェルマーの最終定理を知っていれば偽であると言えます。
すると、「この証明すべき命題は、仮定が偽だから真である」という 1 行の答案が出現したかもしれません。(「A ⇒ B」 という命題は仮定 A が偽であればすべて真になります)
この但し書きによって、そのような答案の出現を防いだとも言えて、その意味でも面白い問題だと思いました。