■論証の方法　：　鳩の巣原理

数学の証明で使う手法にはいくつか有名なものがあります。
前回説明した背理法、対偶を使う方法をはじめとして数学的帰納法、無限降下法、鳩の巣原理などです。
今回は鳩の巣原理の話をしましょう。
その証明方法がどのようなものかは、1989 年広島大学が出題した入試問題がコンパクトにまとめてくれていますので、それを見てみましょう。

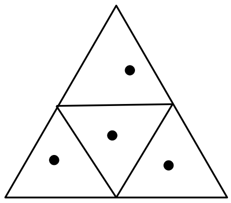
1989 年広島大学

次の文章は，ある条件を満たすものが存在することを証明する際に，よく使われる「鳩ノ巣原理」（または抽出し論法とも言う）を説明したものである.

「m 個のものが，n 個の箱にどのように分配されても，m＞n であれば，２個以上のものが入っている箱が少なくとも１つは存在する」
このことを鳩ノ巣原理という。

例えば，３つの整数が与えられたとき，このうちの少なくとも２つはともに偶数であるか，又はともに奇数である。なぜならば，３つの整数を偶数であるものと奇数であるものとの２組に分けると，鳩ノ巣原理（m＝３，n＝２）により，偶数の組または奇数の組に２つ以上の整数が入っているからである。この原理を用いて，次の命題 (1)，(2) が成り立つことを証明せよ。ただし，証明はこの原理をどのように使ったかが分かるようにせよ。
(1) １辺の長さが２の正三角形の内部に，任意に５個の点を取ったとき，そのうちの２点で，距離が１より小さいものが少なくとも１組存在する。
(2) 座標空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という。座標空間に９個の格子点が与えられたとき，そのうちの２点の中点がまた格子点であるものが少なくとも１組存在する

（1）



図のように1辺の長さが2の正三角形の各辺の中点を結んで、1辺の長さが1の
小さな正三角形を4つつくる。
そこに任意に5個の点を書き入れると、少なくと１つの小正三角形の内部
または周上には2個の点が配置されることになる。
（図は4個の点を書き入れた状態で、これに更に1点を追加してみればよい）
そして1辺が1の正三角形の内部および周上にある2点間の最大値は1だから
１辺の長さが２の正三角形の内部に，任意に５個の点を取ったとき，
そのうちの２点で，距離が１より小さいものが少なくとも１組存在する。

（2）

ｘ，ｙ，ｚを整数とする点（ｘ，ｙ，ｚ）について、ｘ，ｙ，ｚはそれぞれ偶数、奇数を
とりうるから、全部で2×2×2＝８通りの偶数•奇数の組み合わがある。
そうすると、この8通りの組み合わせから9個を選ぶことになるので、そのうちの2
つは偶奇が全て一致することになる。
そして偶奇が一致するとその中点の座標は格子点になるから、題意は示された。

当たり前のことしか言っていないと感じるかもしれませんが、かなり強力な証明方法です。

「鳩の巣原理」は「ディリクレの原理」とも呼ばれています。
ディリクレ（1805 年~ 1859 年）はドイツの数学者で、現代的形式の関数の定義を与えたことで知られています。

もう１題考えてみましょう。

1986年　明治大経営学部

「(n－1) 個以下の引き出しに n 個の物をしまえば、どこかの引き出しには 2 個以上の物が入らなくてはならない (1)」この至極当然の道理は、ディリクレの原理といって数学ではよく利用される。

さて、この原理を使って「どのような会合においても、その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも 2 人はいる」ことを証明しよう。ただし、友人関係は相互的であって、自分自身は友人とはいわない。

会合に集まった n 人の各々に、その友人数を対応させる。友人数は 0 から最大 n－1 までにわたりうるが、0 と n－1 が同時に現れることはない (2)。したがって、友人数の数は n－1 を超えない。そこで、ディリクレの原理により、同じ友人数をもつ人が 2 人はいることになる (3)。

(1)　なぜか、理由をわかりやすく述べよ。
(2)　なぜか、理由を述べよ。
(3)　ディリクレの原理をどう適用したか。

(1)　どの引き出しにも 0 個または 1 個しか入っていないと仮定すると

(引き出しにしまった物の総数) ＝ 1+1+1+・・・+1 (n－1 個以下)

≦ n－1 ＜ n

となり、引き出しにしまった物の総数が n 個であることに矛盾する。

したがって「(n－1) 個以下の引き出しに n 個の物をしまえば、どこかの引き出しには 2 個以上の物が入らなくてはならない」

(2)　友人数が 0 の人がいると仮定すると、友人関係は相互的なので、その人を友人とする人はいない。つまり、このときの友人数の最大値は n－2 となる。

したがって 0 と n－1 が同時に現れることはない。

(3)　(2)により友人数が n－1 の人がいれば、その人は自分以外のすべての人と友人で、その場合友人数が 0 の人はいないことが証明された。

そこで n－1 個の「場所」を用意し、そのうちの n－2 個に 1 から n－2 までの番号札をつける。残りの 1 個には「0 または n－1」と書いた札を立てる。

そしてn人の人全員に自分の友人数と同じ番号の札のところに入ってもらうようにすると、ディリクレの原理によりどこかの「場所」には2人以上の人が入ることになる。
このようにディリクレの原理を適用した。

以上1986年と1989年の入試問題を紹介しました。時代はちょうどバブル景気で賑わっていました。いまはコロナ禍でその頃と時代背景は大きく異なるけれども「思考力」「判断力」「表現力」は更に強く求められているように思います。
ぜひ、じっくり考えてみてください。

次回は「無限降下法」について話をしましょう。