■「重複組合せ」の考え方、あれこれ

【問 1】4 種類の果物、りんご、なし、もも、マンゴーから重複を許して 6 個選ぶ組合せの総数は何通りあるか。

この【問 1】を見た瞬間、反射的に ○ と ｜ が頭に浮かぶでしょうか。

では、次の【問 2】のような問題はどうすればよいでしょうか。

【問 2】$(a+b+c+d)^6$ を展開して同類項をまとめたとき、何種類の項が現れるか。

それでは【問 1】を解いてみましょう。

（解１）まず加えて 6 になる 4 つの数字の組み合わせを書き出し、次にその 4 つの数字をりんご、なし、もも、マンゴーに振り分けるという方法で数えましょう。

加えて 6 になる 4 つの数字の組合せ・・・りんご、なし、もも、マンゴーに振り分ける

(6,0,0,0)・・・・・・・・・・・・・・4 通り
(5.1.0.0)・・・・・・・・・・・・・・$\frac{4!}{2!}=12$ 通り
(4,2,0,0)・・・・・・・・・・・・・・12 通り
(4,1,1,0)・・・・・・・・・・・・・・12 通り
(3,3,0,0)・・・・・・・・・・・・・・$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$ 通り
(3,2,1,0)・・・・・・・・・・・・・・$4!=24$ 通り
(3,1,1,1)・・・・・・・・・・・・・・4 通り
(2.2.2,0)・・・・・・・・・・・・・・4 通り
(2,2,1,1)・・・・・・・・・・・・・・6 通り

これらを合計して、84 通り（答）

これくらいなら数えても大したことはないのですが、果物の種類と選ぶ個数が大きくなると、ちょっと大変そうです。

そこで工夫が生まれたのでした。次の方法です。

（解 2） ○ と ｜ を書いて数える。

まず 6 個選ぶなら、6 個の○を書きます。
○○○○○○
次にこの 6 個の ○ を 4 種類の果物（りんご、なし、もも、マンゴー）に振り分けます。
（○は個数を表し、りんごに○○が振り分けられたら、リンゴ 2 個と数えます）
そのために **|** （仕切り）を入れます。
| は 4 種類の果物に振り分けるのだから 4－1=3 個です。

○|○○|○|○○ となったら、りんご 1 個、なし 2 個、もも 1 個、マンゴー2 個
|○○|○|○○○ なら、りんご 0 個、なし 2 個、もも 1 個、マンゴー3 個
○○○|○||○○ なら、りんご 3 個、なし 1 個、もも 0 個、マンゴー2 個
つまり、 ○ が 6 個と **|** が 3 個を並べる場合の数と 1 対 1 に対応するので

$\frac{9!}{6!3!} = {}_9C_3$ ＝84 (通り)となります。

次に【問 2】を解いてみましょう。
（ a + b + c + d ）^{6} を展開したときの項は $a^xb^yc^zd^w, x≧0, y≧0, z≧0, w≧0$ です。
そこで（ x , y , z , w ）の個数を数えれば良いことになります。
「x + y + z + w = 6 （x≧0 , y≧0 , z≧0 , w≧0）を満たす整数解の組は何通りあるか」
と言い換えることができますね。
これは、6 個の ○ と 3 個の仕切り **|** の並べ方に 1 対 1 に対応します。
たとえば、|○○|○○○|○ は（ x , y , z , w ）=（ 0 , 2 , 3 , 1 ）とみて
$a^0b^2c^3d^1 = b^2c^3d$ となります。
したがって、その種類は ${}_9C_3$＝84 通りです。
【問 1】と本質的に同じですね。

そもそも「重複組合せ」とは異なる n 個のものから重複を許して r 個とる組合せの総数のことで、${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ で求められるのでした。

${}_{n+r-1}C_r$ とは「n＋r－1 個のものから r 個選ぶ」ということです。
つまり（○が r 個、仕切りが n－1 個、合計 r+n－1 個）から r 個選ぶ場合の数のことです。

「n 種類の果物から r 個選ぶ」のなら、まず○を r 個書き、仕切りを n－1 個入れるとよいでしょう。

ところで、H とはいったい何でしょうか？
${}_nH_r$ を書いても書かなくても問題解決には何の関係もなさそうだから、無視されることが多いのが現状です。
H は homogeneous product で「同次積」とか「斉次積」のことです。
「同次式」とは、次数が全て同じである多項式のことで
a+b+c+d とか、ax+by とか、$ax^2+bxy+cy^2$ のような多項式のことです。
そして同次式を n 乗したもの、まさに【問 2】の（ａ＋ｂ＋ｃ＋ｄ）^{6} が「同次積」です。

次に、異なる n 種のものから重複を許して r 個選ぶ選び方が ${}_{n+r-1}C_r$ で求められることについて、別の角度から考えてみましょう。
＊以下の内容は『組合せ数学入門Ⅰ』C.L.リウ　共立全書　を参照しています。

① n 種のものに 1,2,3・・・n と番号をつける。

② 重複を許して r 個選んだ「特定の選び方」に対応する整数を小さい順に並べて
｛1,1,1,3,4,5,5,6・・｝などと表す。（1 番目のものが 3 個、2 番目のものは 0 個、3 番目のものは 1 個、4 番目のものは 1 個、5 番目のものは 2 個・・・ということです)

③ このような r 個の整数に対し、1 番目の整数に 0、2 番目の整数に 1、3 番目の整数に 2、・・・r 番目の整数に r－1 を加えると
｛1+0 , 1+1 , 1+2 , 3+3 , 4+4 , 5+5 , 5+6,・・・｝＝｛1,2,3,6,8,10,11,・・・｝
となって、異なる数の列ができあがります。
このようにすることによって、1,2,3,・・・n から重複して r 個を選ぶ選び方は
整数 1,2,・・・,n+(r－1) から r 個の異なる整数を選ぶ選び方と 1 対 1 に対応するようにできます。したがって異なる n 種のものから重複を許して r 個選ぶ選び方は ${}_{n+r-1}C_r$ で求めることができるというわけです。

【問 1】に即して考えてみましょう。

① りんご、なし、もも、マンゴー4 種類に対し順番に 1,2,3,4 という番号をつける。

② りんご、なし、もも、マンゴーから重複を許して選んだ「特定の選び方」、例えば、
りんご 1 個、なし 0 個、もも 4 個、マンゴー1 個なら｛1,3,3,3,3,4｝となる。

③ ｛1,3,3,3,3,4｝のそれぞれに 0,1,2,3,4,5 を加えると｛1,4,5,6,7,9｝という異なる整数の列となる。この特定の選び方である｛1,4,5,6,7,9｝という数の組は、1 から 9 までの連続する 9 個の数字から異なる 6 個の整数を選んだ選び方の 1 つだということです。

④ そのように考えると、4 種類の果物、りんご、なし、もも、マンゴーから重複を許して 6 個選ぶ組合せの総数は、③の 9 という数字が 4＋(6－1)であることに注意すると
${}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3$ で求めることができることを確認できます。

次のような問題にはどのように対処したらよいでしょうか？

【問 3】

x＋y＋z ≦ 7 （x≧0 , y≧0 , z≧0）を満たす整数解の組は何通りあるか。

「≦」が厄介ですね。しかし、一工夫すると【問 2】と同じ方法で解くことができます。
x＋y＋z が 7 以下になるのだから整数 k（k≧0）を考えて
x＋y＋z＋k＝7 （x≧0 , y≧0 , z≧0 , k≧0）とすることができます。
k を使って左辺がぴったり 7 になるように調整するのです。
この式を満たす整数解の組の個数と
x＋y＋z ≦ 7 （x≧0 , y≧0 , z≧0）を満たす整数解の組の個数は同じです。
よって【問 2】と同じ方法で、7 個の ○ と 3 個の ｜ を書いて ${}_{10}C_3$＝120 通りです。
○○｜○｜○○○｜○　なら x-=2 , y=1 , z=3 となります。
k=1 は無視すればいいですね。

それでは、次のような問題はどうすれば良いでしょうか。

【問 4】早稲田大学　人間科学部　2015

$x+y+z+w=16$ （$x \geqq 6$, $y \geqq 4$, $z \geqq 2$, $w \geqq 0$）を満たす整数解の組は何通りあるか求めなさい。

この問題でネックになっているのは<u>x , y , z の範囲が 0 以上になっていない</u>ことです。
だから、<u>0 以上になるように置き換えれば</u>【問 2】と同じ方法で解くことができます。
$X=x-6$,　$Y=y-4$,　$Z=z-2$,　$W=w$ とおくと
「$X+Y+Z+W=4$ （$X \geqq 0$, $Y \geqq 0$, $Z \geqq 0$, $W \geqq 0$）を満たす整数解の組は何通りあるか」という問題に置き換わります。
これは○が 4 個、| が 3 個の並べ方で、求める場合の数で ${}_7C_3=35$（通り）です。

最後に東大後期の問題で締めくくりましょう。

【問 5】東京大学　後期　1996

n を正の整数とし、n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし、1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

(1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A , B , C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを、A , B , C と区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
(3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。
(4) N が 6 の倍数 6m であるとき、n 個の互いに区別のつかないボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

問題を整理すると、ボールを区別するかどうか、箱を区別するかどうかで 4 つのパターンがありますが、この問題ではその全てのパターンについて答えなさいと言っています。
区別あり○ ， 区別なし× とすると以下の 4 つのパターンです。

	ボール	箱
(1)	○	○
(2)	×	○
(3)	○	×
(4)	×	×

これら 4 つのパターンを明確に意識した答案を期待する出題者の意図が感じられます。
良問だと思います。

(1) ボール 1 の行先は A,B,C の 3 通り、ボール 2 も 3 も・・・と考えたら 3^n 通りあり、
1 個のボールも入らない箱があっても良いので 3^n 通りが答え。

(2) これは典型的な「重複組合せ」の問題ですね。区別のつかない n 個のボールを 3 つの箱 A , B , C に分配するのですから、n 個の ○ と 2 個の仕切り ｜ の並べ方で

${}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ 通りです。

(3) (1)の結果を利用して、箱の区別をなくすという方針で考えるのが良さそうです。

(1)はボールも箱も区別したのでした。
そのとき、2 箱以上にボールが入っている場合、例えば
（A に 1）（B に 2）（C に 3～n）
（A に 1）（B に 3～n）（C に 2）
（A に 2）（B に 1）（C に 3～n）
（A に 2）（B に 3～n）（C に 2）
（A に 3～n）（B に 1）（C に 2）
（A に 3～n）（B に 2）（C に 1）
というような分配は 6 通りとして数えているけれど、箱の区別をなくすと 1 通りとして数えることになります。
＊1 箱が空になっている場合も、ボールと箱に区別があるなら 6 通りとして数えています。

ところが、全てが１つの箱に入っている（2箱が空の）場合は

・全てがＡに入り、ＢとＣは空

・全てがＢに入り、ＣとＡは空

・全てがＣに入り、ＡとＢは空

のようにボールも箱も区別する場合は３通りと数え、箱の区別をなくすと１通りとして数えることになります。

したがって求める場合の数は全体（3^n）からこの３通りを引いた数を 3! で割り、全が１つの箱に入っている場合の１通りを加えれば良いことになります。

つまり、 $\frac{1}{3!}(3^n - 3) + 1 = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) + 1 = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$・・・(答)

(4) まず空き箱がいくつできるかで場合分けしましょう。

(a) 空き箱が２つできる場合

全てのボールが１つの箱に入る場合だから、１通り。

(b) 空き箱が１つできる場合

区別のつかない 6m のボールを２つのグループに分けることを考える。

その２つのグループの、それぞれの個数は

(1,6m－1),(2,6m－2),(3,6m－3),・・・,(3m+1,3m－1),(3m,3m)のうちのどれかの組み合わせになる。したがって、この場合の入れ方は 3m 通り。

$n = 6m$ より $m = \frac{n}{6}$ だから、求める入れ方は $3m = 3 \times \frac{n}{6} = \frac{n}{2}$ 通り。

(c) 空き箱ができない場合

３つのグループの個数に関して、３つの場合に分けることができる。

(ｱ) ３つのグループが同じ個数になるとき

(2m,2m,2m)の１通り

(ｲ) ２つのグループだけが同じ個数になるとき

(1.1.6m－2),(2,2,6m－4),・・・,(3m－2,3m－2,4),(3m－1,3m－1,2)

の 3m－1 通りあるが、この中には(ｱ)とのダブルカウント分が入っているので

$(3m-1)-1 = 3m-2 = 3 \times \frac{n}{6} - 2 = \frac{n}{2} - 2$ 通り。

(ｳ) ３つのグループが互いに異なる個数になるとき

6m (=n) 個の○を並べたとき

両端を除く n－1 個の「ボールとボールのあいだ」から２か所を選び

仕切りを入れる（ただし１つの「あいだ」には１つの仕切りしか入れない）

○○○・・・・○$_{\wedge}$○○・・・・○○$_{\wedge}$○・・・○○・・・○○

そのようにすると３つのグループに分けることができる。

この場合の数は $_{n-1}C_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 通り

しかし、この中には(ｱ)の３つのグループが同じ個数になる場合が1通り含まれ、(ｲ) の２つのグループだけが同じ個数になる場合が各３通り（☆）含まれる。

（☆の例を示すと、このような場合）

○$_{\wedge}$○$_{\wedge}$○・・・・○○○・・・・○○○・・・○○・・・○○

○$_{\wedge}$○○・・・・○○○・・・・○○○・・・○○・・・○$_{\wedge}$○

○○○・・・・○○・・・・○○○・・・○○・・・○$_{\wedge}$○$_{\wedge}$○

よって「３つのグループに分けたときの総数」－(ｱ)－(ｲ)×３・・・(＊)

とすれば３つのグループの個数が互いに異なるように分けることができる。

さて、(＊) をそのまま(ｳ)の答として良いでしょうか？

(＊) の中には

(2m,2m+1,2m－1), (2m,2m－1,2m+1), (2m+1,2m,2m－1)

(2m+1,2m－1,2m), (2m－1,2m,2m+1), (2m－1,2m+1,2m)

のように、箱の区別を失くした時、同じグループになるものが3! 通りあります。

よって、(＊) で求めたものを 3! で割っておかなければいけません。

以上より (＊) $= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 - \left(\frac{n}{2} - 2\right) \times 3 = \frac{1}{2}\left(n^2 - 6n + 12\right)$

これを 3! で割って(ｳ)の場合の数は $\frac{1}{12}\left(n^2 - 6n + 12\right)$

したがって、求める(4)の入れ方は、(a) (b) (c-ｱ) (c-ｲ) (c-ｳ) を合計して

$1 + \frac{n}{2} + 1 + \left(\frac{n}{2} - 2\right) + \frac{1}{12}\left(n^2 - 6n + 12\right) = \frac{1}{12}\left(n^2 + 6n + 12\right)$ （答）

※ (4)は設問の流れからすると(2)の場合を基にして箱の区別をなくすという方針でもできますが、(1)～(3)の設問が無かったとしたらどうするか、ということで考えてみました。