■ 計算の工夫

問

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$とする。

このとき,$x^5 + y^5$の値を求めなさい。

この問題を,$\sqrt{5}$の意味は理解し,和差積商の四則のルールもわかった。
という程度の弟,妹に教えるには,どうすればいいでしょうか。
自分が持っている道具(公理,公準,定理,足りなければ自由に定義しても構わん)を使って
教える方法を考えてみましょう。

解答としては,計算が少しでも少なくなるもの,
または,この後$x^{12} + y^{12}$を求めよと言われてもすぐに対応できるような,
一般化できる解答を優れているものとします。

まだ,効率よく説明するだけの道具は揃っていませんから,ある程度は実験データからの気づきに頼って構いません。”この部分を上手く説明するにはどうしたらいい?”と聞いてくれれば一緒に考えましょう。

（このページは計算用紙です）

①ただ計算してみる

※最初はみんなここからスタートです。兎に角丁寧に(暗算を控えて一行一行変換理由を明確にするように)計算しなさい,そこから効率化のヒントが得られます。

失敗はいくらしても構わん。ただその失敗は忘れないこと。

非効率な経験から効率を学んでみましょう。これから先もっと楽になるにはどうすればいいでしょうか。

つかえるのは四則および結合法則や分配法則,交換法則といったものですね。

$$x^5+y^5=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^5+\left(1-\sqrt{5}\right)^5\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(16+8\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(16-8\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(56+24\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(56-24\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{\left(176+80\sqrt{5}\right)+\left(176-80\sqrt{5}\right)\right\}$$

$$=\frac{352}{2^5}$$

$$=\frac{2^5\times 11}{2^5}$$

$$=11$$

とにかく丁寧に計算してみましたが,どんなことに気が付きますかね。

生徒 A:$\left(1+\sqrt{5}\right)^5$と$\left(1+\left(-\sqrt{5}\right)\right)^5$って$(1+x)^5$で,形一緒だから片方計算すれば,

もう片方計算しなくて良くない？

とか,

生徒 B:$\left(a+b\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=(a+5b)+(a+b)\sqrt{5}$という計算の繰り返しだから,もう$\sqrt{5}$無視

しても計算楽にできそうだなーとか

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}=2\left(3+\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^3=16+8\sqrt{5}=2^3\left(2+\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^4=56+24\sqrt{5}=2^3\left(7+3\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^5=176+80\sqrt{5}=2^4\left(11+5\sqrt{5}\right) \end{cases}$$

生徒 C:“規則性は見つかりにくくなるけど”,2 の倍数を予め消しておけば計算量そのものは

減らせたなーとか

考えてくれれば宜しい。他にもなんか気が付いたらここに,書いておきましょう。

実験が足りないと感じたらもう少し計算を進めても構いません。

生徒 D:

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left[\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}\left(1+\sqrt{5}\right)\right.$$
$$\left.+\left\{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}\left\{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}\left(1-\sqrt{5}\right)\right]$$

僕はこうやって計算するんだー!そうすれば同じ計算は省略できるもん!

とそもそもの計算過程を工夫してみるのも良いでしょう。

下部余白に自分が気づいたことをまとめなさい。

(脱線)少しばかり生徒Cの視点から先を考えてみます。
前述生徒Cの試みについて,計算結果をまとめておくと,

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 6+2\sqrt{5} = 2(3+1\sqrt{5}) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^3 = 16+8\sqrt{5} = 2^3(2+1\sqrt{5}) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^4 = 56+24\sqrt{5} = 2^3\left(7+3\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^5 = 176+80\sqrt{5} = 2^4\left(11+5\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^6 = 576+256\sqrt{5} = 2^6\left(9+4\sqrt{5}\right) \quad \cdot\cdot\cdot ※ \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^7 = 2^6\left(29+13\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^8 = 2^7\left(47+21\sqrt{5}\right) \\ \left(1+\sqrt{5}\right)^9 = 2^9\left(38+17\sqrt{5}\right) \\ \cdot\cdot\cdot \end{cases}$$

$\left(1+\sqrt{5}\right)^9$は$\left(38+17\sqrt{5}\right)$で割り切れるんだなーとか,

左辺の$\left(1+\sqrt{5}\right)$の乗数と右辺の2の乗数の増え方の関係が面白いなーとか,
出てくる整数の値どこかで見た覚えがあるなーーーとか。

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^9 = 2^9\left(38+17\sqrt{5}\right) \quad , \quad \left(1-\sqrt{5}\right)^9 = 2^9\left(38-17\sqrt{5}\right)$$

この2数を辺々かけて遊んでみると,

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^9 \times \left(1-\sqrt{5}\right)^9 = 2^9\left(38+17\sqrt{5}\right) \times 2^9\left(38-17\sqrt{5}\right)$$
$$\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right\}^9 = 2^{18}\left(38+17\sqrt{5}\right)\left(38-17\sqrt{5}\right)$$
$$-1 = \left(38+17\sqrt{5}\right)\left(38-17\sqrt{5}\right)$$

$(x,y) = \left(38+17\sqrt{5}, 38-17\sqrt{5}\right)$は$xy=-1$(反比例のグラフ)上の点の一つだなーーーとか。

↑さすがにコレは歴史知ってないとムリかな。(ペル方程式に発展)

$$-\frac{1}{17^2} = \left(\frac{38}{17}+\sqrt{5}\right)\left(\frac{38}{17}-\sqrt{5}\right)$$

$\frac{1}{17^2}$は0に近いので,$\sqrt{5}$って$\frac{38}{17}$に近いんだなーーーー(棒)

$\frac{38}{17}$=2.2352941176470588235294117647059　(電卓)
でも$\sqrt{5}$の計算するのに,上の※の計算続けるのいやだなーーーとか

$-1 = \left(38+17\sqrt{5}\right)\left(38-17\sqrt{5}\right)$が成り立つんなら

$$(-1)^2 = \left\{\left(38+17\sqrt{5}\right)\left(38-17\sqrt{5}\right)\right\}^2$$

$1 = \left(38^2+17^2\times 5+2\times 38\times 17\sqrt{5}\right)\left(38^2+17^2\times 5-2\times 38\times 17\sqrt{5}\right)$だから

$$\frac{1}{(2\times 38\times 17)^2} = \left(\frac{38^2+17^2\times 5}{2\times 38\times 17}+\sqrt{5}\right)\left(\frac{38^2+17^2\times 5}{2\times 38\times 17}-\sqrt{5}\right)$$

,※の計算するより 2 乗していった方が少ない計算で$\sqrt{5}$により近い値が見つかるんじゃない？.とか （収束スピードの評価はしない）

$$\frac{38^2+17^2\times 5}{2\times 38\times 17} = 2.2360681114551083591331269349845$$

とか,あれ？この計算するくらいなら最初から

$\left(1+\sqrt{5}\right)^3\left(1-\sqrt{5}\right)^3 = 2^6(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$だから

$-1 = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$にしておいて両辺どんどん 2 乗にしていったほうが楽じゃない？とかいくらでも考えてくれて構わないです。

要は$\sqrt{5}$に近い有理数（rational number: (有比数))を探す計算をしていたわけですね。

中２のときに開平法から,図形的な近似,ユークリッドの互除法の応用＋連分数展開まで見せたかな?

上の方法は,初めて見せたと思います。あと残りは微分を教えた後の,ニュートン法くらいでしょうか。

図形の問題でも学びましたが,求められないもの,計算したくないものを

線対称,平行移動,回転,拡大縮小を用いて,

”カンタンなもの,求めやすいもの”を作るというのは基本です。

三角形の面積が求められないとき,三角形を集めて四角形を作り,平行移動などを使って全体を長方形にするとかいった考え方をしたと思います。

もしくは,

求められないものを適切に”分割”して求められる形にする。

５角形を３角形にばらしていくとかいうことをしたと思います。

直角三角形を相似な直角三角形に分割していったりとかね。

計算では,計算したくない部分を文字 a,b,c,d・・・で置き換え,四則演算を用いて,a を集めたり,上手く変形して計算しやすい形を作ることを目指すのは,１つの基本的な手法です。

ただ,図形と違って”分かりやすい値”というのは,1 とか 2 とか定数になることが多いでしょうから,(無理なら,より単純な式)

足したり,引いたり,掛けたり,割ったりで定数を作ることを考えてはどうでしょうかね。

あるいは

計算し辛い部分を計算しやすい部分に分けてあげるのです。

面倒な計算を分けていったら同じ形がいくつも出てくるような問題です。

②単純に置換してみる(本線復帰)

つまりは,”$\sqrt{5}$の入った計算をしたくない。”という中学生の発想ですね。
高校生くらいだと$\sqrt{}$はもう怖くないので,この発想はもう出てこないかもしれませんが。
計算したくないところを後回しにできるのが置換のいいところ。

$$a=\frac{1}{2}\quad ,b=\frac{\sqrt{5}}{2}$$とおくとき,

$x=a+b\quad ,\quad y=a-b$となる。
さて,先ほどと同じように計算しても良いのですが,
$(a+b)^5$の計算をするのに,一回一回掛ける必要はなく,2項定理というものを導いています
から,頭の中ですぐに導けるはずですね?

問 $(a+b)^5+(a-b)^5$を二項定理を用いて計算しなさい。計算が終わったら

a,bにそれぞれ$a=\frac{1}{2}\quad ,b=\frac{\sqrt{5}}{2}$を代入し,値を求めなさい。

解答例

$(a+b)^5$:1 回のゲームの結果がaまたはbであるような,ゲームを 5 回繰り返すような場合を考えれば良いわけです。

$(i)a$が 5 回出る場合, $(ii)a$が 4 回出る場合　$(iii)a$が 3 回出る場合　$(iv)a$が 2 回出る場合, $(v)a$が 1 回出る場合 , $(vi)a$が 0 回出る場合を考えればいいわけですから,

$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$は成立する。・・・①

次にbに$-b$を代入すると

$(a-b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$・・・②

①②を辺々足して

$(a+b)^5 + (a-b)^5 = 2a(a^4 + 10a^2b^2 + 5b^4)$

$= 2 \times \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^4\right)$ (a,bに数値を代入)

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1 + 10(\sqrt{5})^2 + 5(\sqrt{5})^4\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1 + 50 + 5(\sqrt{5})^4\right)$

$= \frac{176}{2^4}$

$= 11$

楽ではありますが,少し物足りません。まだまだ私はサボりたいのです。

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

というxとその内容説明$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$をa,bという何でも入れていい文字で置き換えたわけですから,

使える情報も消えてしまっています。

何を言っているか分からないという人は,先の解答と以降の解答と比較してみれば言わんとするところはわかるかと思います。

③定理を用いて考える(2 項定理)+面倒くさいものx, yをまとめてキレイにしてみる。

では②のような置換は用いずに,(そもそも $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$をxに置換した。と読んでみれば)

$x+y=1$,$xy=-1$ と簡単に定数を作れますからこれを使いたいですね。

問:$x+y=1$,$xy=-1$が成立するとき,x^5+y^5の値を求めなさい。

$x-y=\sqrt{5}$　,　$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-3$ などなども作れます。　(今回は使わんけど)

あとは 2 項定理を学んだあとに証明した

$(x+y)^5-(x^5+y^5)$は 5 の倍数である。ことが頭にあったとすれば,(なくてもすぐ作れる)

解答例 1

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3) \leftarrow x^3+y^3\text{は計算回避したい}$$

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x(x^2+2xy+y^2)+y^2(x+y))$$
$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x(x+y)^2+y^2(x+y))$$

$x+y=1\,,xy=-1$ですから

$$x^5+y^5=1^5-5(-1)(x\times 1^2+y^2(1))$$
$$x^5+y^5=1+5\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$$
$$x^5+y^5=11$$

少し楽になったでしょうか。もちろん$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}$をつかえるよーという方は使えばよろしい。

解答例 2

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3) \leftarrow x^3+y^3\text{は計算回避したい}$$

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy\big((x+y)((x+y)^2-3xy)+2xy(x+y)\big)$$
$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)((x+y)^2-xy)$$
$$x^5+y^5=(1)^5-5(-1)((1)^2-(-1))$$
$$x^5+y^5=11$$

ひとつ上の解答より格好よくなったのが分かりますか？計算がほとんど必要なくなっていますよね。これなら計算力皆無の私でも,答えを合わせることが可能な気がしてきました。

④実験して考える（帰納法）（※数学的帰納法ではないよ）

中三の生徒Ｄくんの場合:
基本方針は,”いきなりx^5+y^5次数が大きい計算はムリだから,まずは
$x+y$から考えよう!”　というものです。大変素晴らしいですね。

$$x+y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2xy$$
$$xy=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-1 \text{ だから}$$
$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-1(-2)=3$$
$$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)=3\times 1-(-1)\times(1)=4$$
$$x^4+y^4=(x^3+y^3)(x+y)-xy(x^2+y^2)=4\times 1-(-1)\times(3)=7$$
$$x^5+y^5=(x^4+y^4)(x+y)-xy(x^3+y^3)=7\times 1-(-1)\times(4)=11$$

この先は
$x^6+y^6=11+7=18$ ですから,以下
29,47,76,118,・・・・　とひたすら前の２つの数字を足せばいいのではないか？
と予想できますね。このことは$n\geqq 2$において,

$$(x^n+y^n)(x+y)=x^{n+1}+y^{n+1}+xy(x^{n-1}+y^{n-1})$$

が成立することを計算して示しておけばいいわけです。
今回であれば,$x+y=1, xy=-1$ですから
$(x^n+y^n)=(x^{n+1}+y^{n+1})-(x^{n-1}+y^{n-1})$つまりは

$(x^{n+1}+y^{n+1})=(x^n+y^n)+(x^{n-1}+y^{n-1})$が成立します。

計算が整数の足し算だけになっていき,今後の見通しも良いですね。
　こと小～高のレベルの数学において,
上のようなx^5+y^5は”直接求めることが難しいから,もしくは面倒だから”数を小さくして,$x+y$とかx^2+y^2とか考えてみようという選択肢がまず出てくることのほうが,余程大切なのです。
“難しい”なら”カンタンにしよう”というのは素敵な考え方です。
“難しい”なら”必殺技を探してこよう”→”ぱららぱっぱぱ～♪　なんちゃらのていりー～!”
は,私は好きではありません。
　リュカ数列（フィボナッチ,ペル,メルセンヌ)など,色々名前もありましょうが,今は必要ありません。
　沢山の掛け算を簡単な足し算に変えられることに自力で気が付いたことに価値があり,
それは,とても素晴らしいことだと思います。

⑤対称式を利用して置換してみる。(中 3 は流し読み,高校 1 年からはしっかり)
先ほどから主張の激しい$x+y, xy$ですが,対称式といいます。

2 変数の対称式の定義 :二つの変数を入れ替えても等しい
2 変数の対称式の定義式　$f(x,y)=f(y,x)$

$f(x,y)=x^5+y^5$とおくとき,
$f(y,x)=y^5+x^5$

$f(x,y)=f(y,x)$が成立するので,x^5+y^5は対称式である。

対称式だったら?　　基本対称式 $x+y, xy$を使って表すことができる。

$x+y=s$　,$xy=t$とおくとき,(以降 10 ページの二項定理の式変形と同じ流れ)

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)$$
$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy\big((x+y)((x+y)^2-3xy)+2xy(x+y)\big)$$
$$x^5+y^5=s^5-5st(s^2-t)$$

これでは別にうれしくもなんともない。(x,y):(5 次,5 次)だったのが(s,t):(5 次,2 次)と少し次数が下がっているくらいです。

もう少し対称式について知っておくと
xに$-y$を代入するとき,

$$f(-y,y)=(-y)^5+y^5=0$$

となるから,$f(x,y)$は$x+y$を因数に持つので

$$f(x,y)=(x+y)g(x,y)\text{と置く。}$$

このとき,$f(y,x)=(y+x)g(y,x)$を満たすので,

$$(x+y)g(x,y)=(y+x)g(y,x)$$

よって　$g(x,y)=g(y,x)$より $g(x,y)$も対称式である。(∵今回$x+y\neq 0$)

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3\mathrm{y}+x^2y^2-xy^3+y^4)$$
$$x^5+y^5=x^2y^2(x+y)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)+1-\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$
$$x^5+y^5=(xy)^2(x+y)\left(\left(\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2-\left(\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)\right)-1\right)$$

式を見てきれいだなーと思えたら,よし。

計算の苦手な私でも,対称であることから,答えの予想ができる(先が読める)ので
計算ミスをしにくくなります。私に 4 行以上の計算をさせてはダメです。

高校に入ったら問題集の計算を見ていると,こういう形のところが何回も出てくると思いますが,何の為に計算しているかは,自力ではわかりづらいでしょう。
意味や工夫を考えるよりも,何秒で解けるかに重点が置かれていそうです。
基本的に,今までに学んだ数学の歴史において,転換点となった証明に出てくる計算の工夫や気づきが多いのですがね。

トマト,とかタケヤブヤケタとか,ｿｰﾊﾝﾎｰﾃｰｼｷｰを見つけたら!→ﾌﾀｴﾉｷﾜﾐｰとかｶﾒﾊﾒﾊｰとかゴムゴムノーとかいう必殺技を覚えるよりは,一度きちんと時間をかけて計算してみればいかがでしょうか。計算結果から中学生が推測できる内容を証明していけば,高校内容の範囲の多くカバーされます。

図形の問題を考えるとき,図形が苦手な子でも,なんとなく線対称な補助線を入れようとしますよね。これは経験的に,対称なときに解きやすいことを知っているからでしょうが,
それと同じことが式でもできるというだけです。
　自然現象を表す方程式は美しいはずだ”対称なハズだ!”と科学者たちが信じたことで拓けた物理分野もありますので,”対称式”にも興味を持ってくれたらと思います。
　まぁプログラムをする人の話にすると,だらだら長いプログラムを作る人と
短いすっきりしたプログラムを作る人,どっちが欲しいかと言われたら当然後者です。
　同じコンピューターに 2 つのプログラムを走らせたら,当然カンタンな方が時間も,電気代も浮きますからね。長いプログラムは長い解答に,短いプログラムは,すっきりした解答に対応していくと思います。
　2019 年度,中 2 の T 君が授業後に実際にエクセルで$\sqrt{3}$などの近似を求めさせる命令を何種類か出して,遊んでいましたが,
命令の出し方が下手だと,遅かったり,そもそもパソコンの能力でも計算できない場合があるのです。あんまり下手な命令をだすと,負荷かかりすぎてパソコンの寿命が縮みます。
冬場に暖房器具が壊れてしまったら,面倒なプログラムを入れた方が,部屋が暖かくなるかもしれません。

⑥次数を下げてみる

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad,\quad y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{とする。}$$

このとき,x^5+y^5の値を求めなさい。

中 3 生 S 君の場合:

この問題の面倒くさいところは掛け算が多いところなので,

掛け算を減らせばいいじゃない?ということです。

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{という}x\text{に関する条件がありますから,}$$

これを使って次数を下げる公式を作ればいいわけです。

$$2x=1+\sqrt{5}$$
$$2x-1=\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow (2x-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2\quad\text{を満たす必要がある。}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=5$$
$$\Leftrightarrow x^2=x+1$$

日本語で読むと,"xを二回掛ける計算はxに 1 を足す計算に等しい"と書いていますが,

計算が右手に分身の術を覚えさせる為の訓練であると勘違いしている人は,まず

式を日本語で読んでみるということはしませんね。急がば回れです。

問

$x^2=x+1\,,y^2=y+1$が成立するときx^5+y^5をxとyの一次式に直しなさい。

解答例 1

$$x^5 = x^2 \times x^2 \times x$$
$$x^5 = (x+1)(x+1)x$$
$$x^5 = (x+1)(x^2+x)$$
$$x^5 = (x+1)((x+1)+x)$$
$$x^5 = (x+1)(2x+1)$$
$$x^5 = 2x^2+3x+1$$
$$x^5 = 2(x+1)+3x+1$$
$$x^5 = 5x+3$$

xを 5 回掛ける計算はxを 5 倍して,3 を足す計算に等しい　と言っているわけです。

yについても同様にすると$y^2 = y+1$と同じものが出てきますから

xおよびyは$x^2 = x+1$という公式を使って計算してよいグループに入っていることが分かります。

$$x^5 + y^5 = (5x+3) + (5y+3) = 5(x+y) + 6 \quad \text{(終わり)}$$

ここで,

$x + y = 1$より

$$x^5 + y^5 = 11$$

解答例 2
$x^2 = x + 1$から,$x \neq 0$より両辺にxを掛けて
$x^3 = x^2 + x$
$x^4 = x^3 + x^2$
$x^5 = x^4 + x^3$
これらが成立することから,

$x^5 = x^4 + x^3 = 2x^3 + x^2 = 3x^2 + 2x = 5x + 3$ (以下解答例 1 と同じ)

このように解いても構いませんし,これを見ていると~
"整式"であることを意識できるのではないでしょうか。

つまり

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

整式$x^2 - x - 1$は"0 に等しい" "ない","計算しなくていい","無視していい"
この"無視する"というのは,整数に関する四則演算の中で,割り算の余りに着目するときの基本でした。整式でも基本の考え方は同じですので,

解答例 3

$$x^5 = (x^2 - x - 1)Q(x) + R(x)$$

2 次式で割っているので,$R(x)$は 1 次式以下です。 ひっ算して$R(x)$を求めましょう。
計算してみると

$$x^5 = (x^2 - x - 1)Q(x) + (5x + 3)$$

となります。

$$x^5 = 0 \times Q(x) + (5x + 3) \quad (\text{以下同じ})$$

一つ前の$x^2 = x + 1$をちくちく代入していくより楽になったはずです。

2 次方程式を習った後であれば,
x, yが共役な複素整数であり,
$X^2-(x+y)X+xy=0$を満たす 2 解であることが見えるでしょう。
今の段階では$x^2-x-1=0$にどこから気が付くかというだけの話なので大同小異になりますが,二次方程式の 2 解に関するテーマとしてこれらの知識と結び付けておけば
今後便利になるでしょう。

高校 1 年になったら 数列の単元でもう一回, 整式の剰余類でも 1 回,数列の極限でも一回
数Ⅲ微積の置換でも一回,カテナリーとか双曲線関数のところでも一回と
まぁ何回でもやりますので,今のところはノンビリ計算しておきましょう。
あと,計算の過程で面白いことを見つけたら教えて下さいね。

問

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad ,\quad y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{とする。}$$

このとき,$x^{12}+y^{12}$の値を求めなさい。