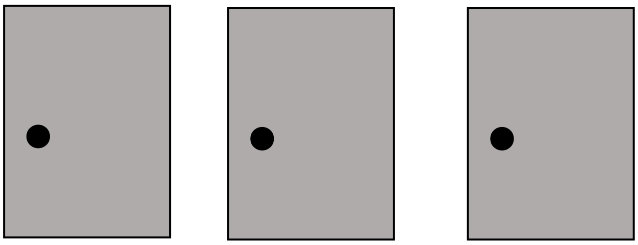
■モンティ・ホール問題の核心

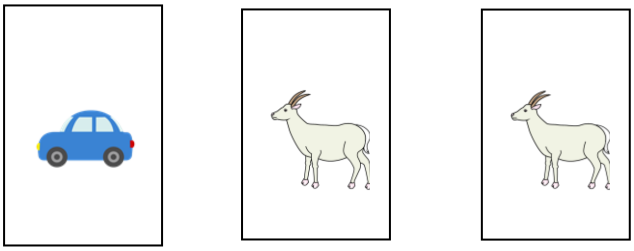
「モンティ・ホール問題」とは、モンティ・ホールが司会を務めるアメリカのショー番組でゲームを行ったのですが、多くの人の直感とズレたことから後に論争となった問題の事です。

A　B　C



３つのドアがあります。
１のドアには車（当たり）が
残り２つのドアにはヤギ(はずれ)
が入っています。

A　B　C



ドアを開けると、こんな感じです。

１．挑戦者は３つのドアから一つを選びます。
２．司会のモンティ・ホールは（当然どのドアに当たりの車が入っているのかを知っているので）残りのドアの内ヤギが入っているドアを開けて見せます。
３．閉まっているドアは２つになりました。
　その時、司会者のモンティ・ホールは挑戦者に言います。
　「今選んでいるドアを変更してもいいですよ！」
４．さて、挑戦者はドアを変更した方がよいでしょうか？
という問題です。

「1990 年 9 月 9 日発行、ニュース雑誌「*Parade*」にてマリリン・ボス・サヴァントが連載するコラム「マリリンにおまかせ」で、読者投稿による質問（プレーヤーはドアを変更すべきだろうか？）に「正解は『ドアを変更する』である。なぜなら、ドアを変更した場合には景品を当てる確率が 2 倍になるからだ」と回答。すると直後から、「彼女の解答は間違っている」との約 1 万通の投書が殺到し、本問題は大議論に発展した」Wikipedia より

多くの人の直感は「ドアが２枚になったとき、どちらかに当たりが入っているのだから当たる確率は $\frac{1}{2}$ で同じではないか。だから、変更しても、しなくても同じ」だったといいます。
どちらが正しいのでしょうか？
このような問題を考えるとき、どうすればよいのでしょうか。

※確率を考える時の基本

１．根元事象（それ以上細かく分解して考えることができない事象)、情報をモレなく書き出す。
２．「同様に確からしい」かどうかに注意する。
３．それらの起こりやすさに比を振る。

■根元事象、情報をモレなく書き出してみます。

１.「当たり」の車はどこに隠されたか。→A.B.C の３通り
２．挑戦者がどのドアを選ぶか。→A.B.C の３通り
３．司会者のモンティ・ホールはどのドアを開けるか
→挑戦者が「当たり」を選んでいたら２通り、「はずれ」を選んでいたら１通り
４．挑戦者がドアを変更するか。→するか、しないかで２通り
５．挑戦者が「当たり」をゲットできるかどうか。→４の選択で１通りに決定する。

■これらの起こりやすさに比を振って、表を書いてみます。

１.「当たり」の車はどこに隠されたか。→A.B.C の３通り

これらは「同様に確からしい」ので確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

２．挑戦者がどのドアを選ぶか。→A.B.C の３通り

これらも「同様に確からしい」ので確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$

すると、Ａに「当たり」が隠されて、挑戦者がＡを選ぶ確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Ｂ、Ｃを選ぶ確率も $\frac{1}{9}$ になります。

３．司会者のモンティ・ホールはどのドアを開けるか。
「当たり」がＡに隠されていて、挑戦者がＡを選んだ場合、司会者のモンティ・ホールが選ぶことができるドアはＢかＣでこれらは「同様に確からしい」

したがってモンティ・ホールがＢのドアを選ぶ確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Ｃのドアを選ぶ確率も同じ。

４．あとは挑戦者がドアを「変更するか」「変更しないか」で「当たり」「はずれ」が一通りに決まります。

５．これらを一覧にしたものが次の表になります。

賞品はどこに隠されたか	挑戦者はどこを選んだか	司会者が開けたドア	ドアを変更するか否か	当たりか外れか
A $\frac{1}{3}$	A $\frac{1}{9}$	B $\frac{1}{18}$	する（Cを選ぶ）	はずれ
			しない（Aを選ぶ）	当たり
		C $\frac{1}{18}$	する（Bを選ぶ）	はずれ
			しない（Aを選ぶ）	当たり
	B $\frac{1}{9}$	C $\frac{1}{9}$	する（Aを選ぶ）	当たり
			しない（Bを選ぶ）	はずれ
	C $\frac{1}{9}$	B $\frac{1}{9}$	する（Aを選ぶ）	当たり
			しない（Cを選ぶ）	はずれ
B $\frac{1}{3}$	A $\frac{1}{9}$	C $\frac{1}{9}$	する（Bを選ぶ）	当たり
			しない（Aを選ぶ）	はずれ
	B $\frac{1}{9}$	A $\frac{1}{18}$	する（Cを選ぶ）	はずれ
			しない（Bを選ぶ）	当たり
		C $\frac{1}{18}$	する（Aを選ぶ）	はずれ
			しない（Bを選ぶ）	当たり
	C $\frac{1}{9}$	A $\frac{1}{9}$	する（Bを選ぶ）	当たり
			しない（Cを選ぶ）	はずれ
C $\frac{1}{3}$	A $\frac{1}{9}$	B $\frac{1}{9}$	する（Cを選ぶ）	当たり
			しない（Aを選ぶ）	はずれ
	B $\frac{1}{9}$	A $\frac{1}{9}$	する（Cを選ぶ）	当たり
			しない（Bを選ぶ）	はずれ
	C $\frac{1}{9}$	A $\frac{1}{18}$	する（Bを選ぶ）	はずれ
			しない（Cを選ぶ）	当たり
		B $\frac{1}{18}$	する（Aを選ぶ）	はずれ
			しない（Cを選ぶ）	当たり

さて、結果を見てみましょう。

「ドアを変更する」と意思表示した時に「当たる」確率は黄色に色を付けた部分の和で

$\frac{1}{9} \times 6 = \frac{2}{3}$

「ドアを変更しない」と意思表示した時に「当たる」確率は灰色に色を付けた部分の和で

$\frac{1}{18} \times 6 = \frac{1}{3}$

確かにドアを「変更する」場合の「当たる」確率の方が、「変更しない」場合の２倍になっています。

これは、よく考えてみれば当たり前のようにも思います。
司会者のモンティ・ホールが「はずれ」のドアを開けて「当たり」のドア１つと「はずれ」のドア１つに絞ったとき、「当たり」が入っているということに関してこれら２つのドアは「同様に確からしい」のかを考えてみれば良いのです。

こんな時は極端な場合を考えて思考実験してみるとよくわかることがあります。
100 個のドアがあり、その 1 つに「当たり」が入っているとき、それら 100 個のドアから 1 つを自分が選んだとします。

その選んだドアが「当たり」である確率は $\frac{1}{100}$です。

その後、司会者が「はずれ」のドアを次々に（98 個！）開けていきます。
その時自分が選んでいるドアや自分は選ばなかったドアのうち開けられないで残っていくドアが「当たり」である確率はどうなっていくのでしょうか？・・・
最終的に自分が最初に選んだドアと、最後まで開けられないで残ったドアの２つが残ります。そのとき、目の前のその２つのドアは「同様に確からしい」でしょうか？

「同じ程度に当たりを期待できる」と考えられるでしょうか？
ここが核心です。

最初の状態で考えると、自分がいま選んでいるドアが「当たり」の確率は $\frac{1}{100}$ 、「はずれ」の確率は $\frac{99}{100}$ですよね。つまり、自分が選ばなかったドアたちの中に「当たり」が隠されている確率が $\frac{99}{100}$だということです。その 99 個のドアのうち「はずれ」のドアを次々に開けていき最終的に１つのドアが残りました。そう考えると、そのドアが「当たり」である確率は $\frac{99}{100}$であると考えられるのではないか。

このことはモンティ・ホール問題の結果ともぴたりと一致します。
「当たり」１つ、「はずれ」２つから１つ選んだわけですから、自分が選んだドアが「当たり」である確率は $\frac{1}{3}$ 、「はずれ」である確率は $\frac{2}{3}$ だと考えるのが妥当だということになります。言い換えると、挑戦者が選んだのではない２つのドアのどちらかに「当たり」が入っている確率が $\frac{2}{3}$で、その２つのドアのうち「はずれ」の方を司会のモンティ・ホールが開けたのですから、残りの１つのドアに「当たり」が入っている確率の方が高い (2 倍)。そう考えると、ドアは変更した方が良いことになります。
「マリリンにおまかせ」でのコメントは正しかったということです。

確率の問題を考える時に、直感とズレたり、なんとなく腑に落ちないことがよくあります。

その原因は「根元事象、情報をモレなく書き出す」という部分でミスをしたり、本来「同様に確からしくない」ものを「同様に確からしい」と勘違いしてしまうことにあるように思います。
気を付けておかないといけません。