■無限降下法

以前、$\sqrt{2}$ が無理数であることを「背理法」を使って証明しました。

【証明】
（実数） $\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、有理数だから
$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ （a,bは互いに素な整数）とおける.
分母を払って両辺を2乗すると$2a^2=b^2$ …①となる
①の左辺は偶数だから、右辺のb^2も偶数になる.したがってbも偶数.
するとb = 2m（mは整数）とおけて、これを①に代入して両辺を2で割ると
$a^2=2b^2$ となり、同様の論理でaも偶数となるが、これはa,bが互いに素であるという仮定に矛盾する.
このことは$\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定が間違っていることを示していて、 $\sqrt{2}$ は有理数ではないといえる.
したがって （実数は有理数でなければ無理数だから）$\sqrt{2}$ は無理数である.

この証明では、「a , b が互いに素」であるという仮定をおいたことに矛盾したのでした。
ところが、この下線部の仮定をおかなくても矛盾を導き出すことができるのです。
やってみましょう。

$2a^2 = b^2$ ・・・①となるまでは同じ。
すると上の証明と同様にして b は偶数となるから $b = 2b_1$ とおける。
以下、$a , a_1 , a_2 ,$・・・$, b , b_1 , b_2,$・・・は全て自然数とする。
① より $2a^2 = 4b_1^2$ となるから $a^2 = 2b_1^2$
a は偶数だから $a = 2a_1$ とおける。
これを繰り返すと、$a = 2a_1 = 4a_2 = 8a_3$・・・　、$a = 2a_1 = 4a_2 = 8a_3$・・・
と無限に繰り返すことができる。
ところが、これは自然数を無限に小さくできるということを意味していて矛盾している。

この論理を「無限降下法」と呼んでいます。
「自然数（またはその部分集合）には最小値が存在する」
ということを利用した証明方法です。

入試問題を解いてみましょう。

2014年 九州大学（理系）前期

次の問いに答えよ。

（1） 任意の自然数 a に対し、a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

（2） 自然数 a , b , c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、a , b , c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

（3） $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a , b , c は存在しないことを証明せよ。

（1） a が 3 の倍数のとき、a^2 も 3 の倍数

a が 3 の倍数ではないとき、$a = 3k \pm 1$ （k は自然数）とおくと

$a^2 = (3k \pm 1)^2$

$=9k^2 \pm 6k+1$

$=3(3k^2 \pm 2k)+1$, $3k^2 \pm 2k$ は自然数

となるので a^2 を 3 で割った余りは 1

以上より、任意の自然数 a に対し、a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

（2） 自然数 a , b , c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ ・・・① を満たすとき、

右辺の $3c^2$ は 3 の倍数であるから、左辺の $a^2 + b^2$ も 3 の倍数である。

(1)より a^2 , b^2 をそれぞれ 3 で割った余りは 0 か 1 だから $a^2 + b^2$ が 3 の倍数であるとき a^2 , b^2 はともに 3 の倍数である。よって a , b はともに 3 の倍数となる。

このとき $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ (a_1 , b_1 は自然数)とおけて、これらを①に代入すると

$9a^2 + 9b^2 = 3c^2$ より $3(a^2 + b^2) = c^2$ となる。

c^2 は 3 の倍数、つまり c も 3 の倍数である。

以上より、自然数 a , b , c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、a , b , c はすべて 3 で割り切れなければならない。

（3） $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a , b , c が存在すると仮定すると

（2）より a , b , c はすべて 3 で割り切れるので

$a = 3a_1$, $b = 3b_1$, $c = 3c_1$ （a_1 , b_1 , c_1 は自然数)とおける。

それらを $a^2 + b^2 = 3c^2$ に代入すると $9a^2 + 9b^2 = 27c^2$ より $a_1^2 + b_1^2 = 3c_1^2$ が成立する。このとき $a_1 = 3a_2$, $b_1 = 3b_2$, $c_1 = 3c_2$ （a_2 , b_2 , c_2 は自然数)とおける。

以下この操作を繰り返せば、

$a = 3a_1 = 9a_2 = 27a_3$ ・・・ (a, a_1, a_2, a_3・・・ は自然数)

$b = 3b_1 = 9b_2 = 27b_3$ ・・・ (b, b_1, b_2, b_3・・・ は自然数)

$c = 3c_1 = 9c_2 = 27c_3$ ・・・ (c, c_1, c_2, c_3・・・ は自然数)

となり、自然数 a, b, c を無限に小さい自然数で表すことができる。

これは<u>自然数には最小の値が存在することに矛盾</u>する。

したがって、$a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない。

この「無限降下法」はフェルマーが「私の方法」と表現して、好んで使ったと言われています。有効な証明方法ですのでよく理解しておいてください。