

■ 天使か悪魔か - 条件命題「AならばB」の否定と真偽

ある中3生とこんなやりとりをしました。

命題「 $A \Rightarrow B$ 」(AならばB)の否定はどうなりますか？

「 $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ 」("Aでない"ならば"Bでない")です！

それは"逆・裏・対偶"の"裏"だよ。

* $A \Rightarrow B$ のAは仮定、Bは結論といいます。そして仮定と結論をそれぞれ否定することを"裏"といいます。

あっ！そうか...

命題「 $A \Rightarrow B$ 」は「Aを満たすすべての要素がBを満たす」という意味だから

その否定は「Aを満たすある要素がBを満たさない」となります。

つまり、「AであってBではないものがある」ということです。

さらに、命題「 $A \Rightarrow B$ 」の否定は「 $A \Rightarrow \overline{B}$ 」... (*) ではないことに注意が必要です。

(*)は「Aを満たすすべての要素がBを満たさない」という意味ですから。

次に「真理表」を考えてみましょう。

命題が真であることをT (True)で表し、偽であることをF (False)で表します。

命題 p, q の真偽の組み合わせは4パターンあるから、それぞれの真偽を考えると以下の表のようになります。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \Rightarrow q$ が真であるか偽であるかを考えるとき、 p が真で q が偽なら $p \Rightarrow q$ は偽だとすぐわかりますよね。

「今度の日曜日雨が降らなかったら (p) \Rightarrow 海へ行こう (q)」という約束をして、
「今度の日曜日に雨が降らなかった」にも関わらず「海へ行かなかった」としたら、
「 $p \Rightarrow q$ 」は偽です。

ところが注意をしないといけないのは「今度の日曜日に雨が降った (p が偽の) 場合」
です。この場合は何も約束していませんから「海に行っても行かなくても」あるいは
「映画に行っても」 $p \Rightarrow q$ という命題は (論理的には正しく) 真ということになります。
日常的な感覚では納得しづらいかもしれませんが、注意が必要です。

さて以上の知識を前提として、以下の入試問題を考えてみてください。

2004 慶応義塾大 総合政策学部

天使はつねに真実を述べ、悪魔はつねに嘘をつく。A,B は悪魔か天使であることは分かっているが、どちらかははっきりしない。A がこういった「わたしが天使ならば、B も天使です」。この二人の正体は である。

(選択肢)

1. A,Bともに天使
2. Aは天使,Bは悪魔
3. Aは悪魔,Bは天使
4. A,Bともに悪魔

条件命題「Aが天使ならば、Bも天使です」・・・(**)について

この命題(**)を否定すると「Aが天使であるとき、Bが悪魔である」となります。

そしてこのときだけが論理的に間違い(偽)となります。

そのことに注意して考えてみましょう。

1. A,Bともに天使のとき。Aは天使だから「つねに真実を述べ」Bも天使となります。
このとき命題(**)は真。
2. Aは天使,Bは悪魔のとき。Aは天使だからBが悪魔だという「真実を述べ」るはずですが、「Bは天使です」と嘘を言っています。したがって、この命題(**)は偽。
3. Aは悪魔,Bは天使のとき。「Aが天使ならば」という仮定が偽だから、命題(**)は真。そうすると悪魔であるAが論理的に正しいことを言ったことになり、「悪魔はつねに嘘をつく」ということに対して矛盾する。
4. A,Bともに悪魔のとき。3と同様に命題(**)が真となり、「悪魔はつねに嘘をつく」ということに対して矛盾する。

以上より、答えは「A、Bともに天使」となります。

このように条件命題は、日常の感覚からするとちょっと受け入れがたいところがあります。かつてイギリスの哲学者・数学者であるバートランド・ラッセル（1872～1970）がこんなことを言ったそうです。

「 $1=2$ が成り立つならば、私はローマ法王です」

「 $1=2$ 」という仮定が間違っている（偽）ので、結論として何を（私はローマ法王ですと）言ってもこの命題は真となるということです。

（おまけ）2004年の慶応義塾大総合政策学部にはもう一つ問題がありました。
ぜひ考えてみてください。

3人の女神が口論している。

もっとも美しい女神はただ一人であるとする。

アテナ「もっとも美しいのはアフロディテではない」

アフロディテ「もっとも美しいのはヘラではない」

ヘラ「わたしがもっとも美しい」

もっとも美しい女神のみが真実を述べている。それは である。

（選択肢）

1. アテナ
2. アフロディテ
3. ヘラ

【ヒント】

こんな場合は、

- (i)アテナだけが真実を述べていると仮定して矛盾がないか確かめる。
- (ii)アフロディテだけが真実を述べていると仮定して矛盾がないか確かめる。
- (iii)ヘラだけが真実を述べていると仮定して矛盾がないか確かめる。

(答) 2.アフロディテ