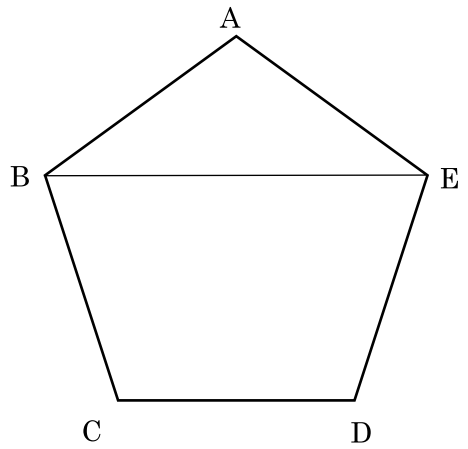
正五角形の作図

正五角形を自分で作図できるようになってみましょう。
正五角形とは,
定義①すべての辺の長さは等しく,
定義②すべての内角の大きさが等しい
図形の中で,辺および頂点の数が 5 個のもの。
ということにします。ただし,正$\frac{5}{2}$角形,つまり星形正五角形は除きます。

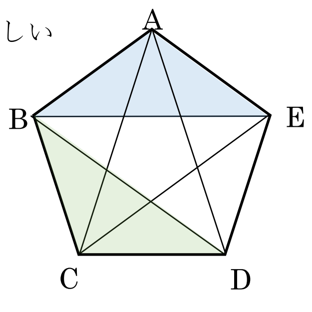
やみくもに作図しても仕方がありませんから,
まずは,正五角形のことについてよく調べてみましょう。

問題 1
正五角形 ABCDE において、
対角線 BE を引くことでできる
三角形 ABE が二等辺三角形になることを
説明しなさい。



答え：　定義①から正五角形のすべての辺の長さは等しいので,AB=AE
　　　従って,三角形 ABE は,A を頂角とする二等辺三角形といえる。

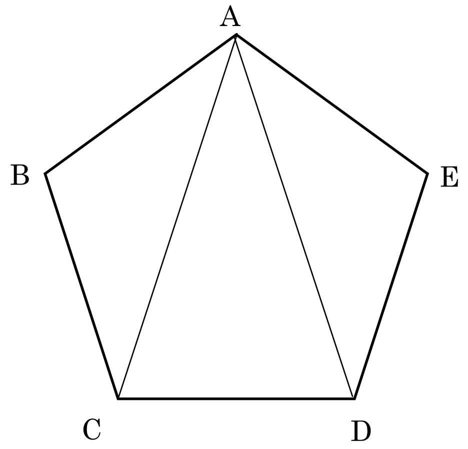
問 1 の結果から,
同じように,⊿BCA,⊿CDB,⊿DEC,⊿EAD も⊿ABE と合同(ぴったり重なる)な三角形ですね。
合同条件になる理由は正五角形の定義①から２辺の長さが等しい
　　　　　　　　　　定義②から,２辺の間の角が等しい
ということになります。



問 1 の結果は,これ以降使ってよいことにします。

問題 2

正五角形 ABCDE において、
対角線 AC,AD を引くとき,
三角形 ACD が二等辺三角形になることを
説明しなさい。
(問 1)の結果を使いましょう。

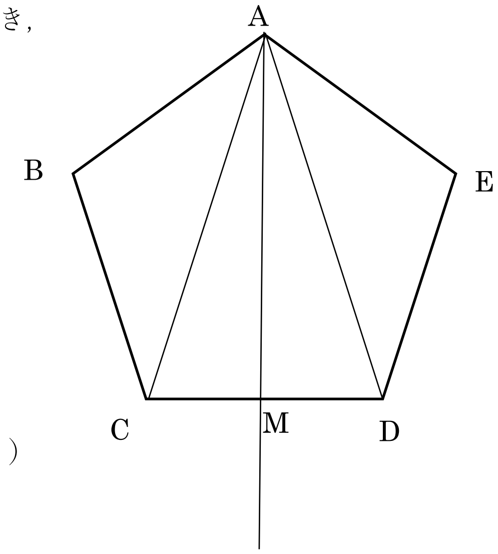


答え:
問 1 の結果より,⊿BCA と⊿EAD は合同だから,AC=AD
よって⊿ACD は A を頂角とする二等辺三角形といえる。

問 2 の結果から,⊿ACD,⊿BDE,⊿CEA,⊿DAB,⊿EBC は合同な三角形です。

問 2 の結果はこれ以降使ってよいことにします。

問題 3



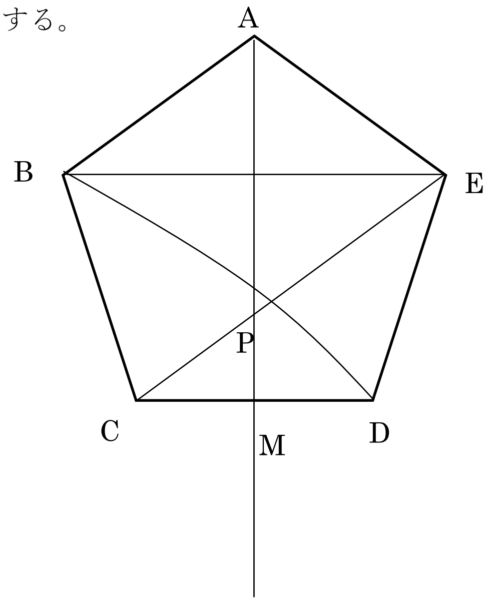
正五角形 ABCDE について,∠DAC の二等分線をひき,
二等分線と辺 CD の交点を M とします。
AM について,正五角形を折ったとき,
⊿ACD は A を頂角とする二等辺三角形なので
AM は線分 CD を垂直に二等分し,
点 C と点 D が重なります。
このとき,
点 B が点 E に重なることを説明しなさい。
(二等辺三角形について,頂角の二等分線が
底辺を垂直に二等分することは使って構いません。)

答え:
AM は∠DAC を二等分するので∠CAM=∠DAM
問 1 の結果から∠BAC=∠EAD が言えるので,
∠CAM+∠BAC=∠DAM＋∠EAD
∠BAM＝∠EAM
よって AM は二等辺三角形 ABE について,頂角∠BAE の二等分線になるので,
線分 BE を垂直に二等分し,従って点 B は点 E に重なる。

この結果から,正五角形は AM で線対称になっていることがわかります。
問 1,2 の結果もあわせて,ぜんぶで 5 本の対称軸を持っています。

問題 4

正五角形の∠A の二等分線と辺 CD との交点を M とする。
対角線 CE と AM の交点を P とするとき,
対角線 DB も AM と点 P で交点を持つことを
説明しなさい。
(問 3 の結果を使いなさい.)

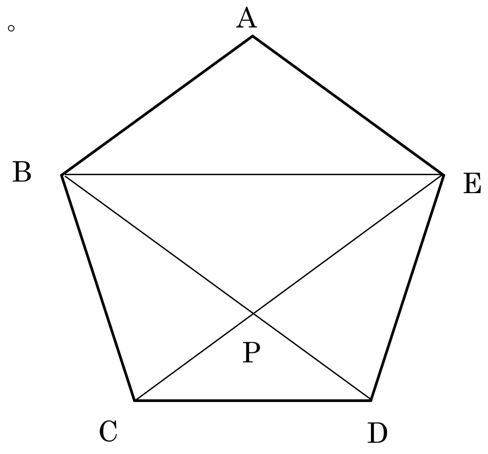


答え:正五角形は AM について線対称であるから,
点 C は AM について D に重なり,点 B は E に重なるので,
線分 CE 上の全ての点は AM について線対称移動すると DB に重なる。
従って CE 上の点 P に重なる点は DB 上に存在する。
点 P は CE と AM の交点なので,
AM 上の点 P を AM について線対称移動するならば,点 P に移動する。
直線 AM と線分 DB の交点の数は 1 個か 0 個に限られるので,
点 P は線分 DB と AM の交点である。

この結果から,CP=DP ですから,⊿PCD は P を頂角とする二等辺三角形です。
問 1 の結果から CE=DB は言えるので,
CE-CP=DB-DP
PE=PB となりますから
三角形 PEB も P を頂角とする二等辺三角形です。
また,∠CPD=∠EPB (∵対頂角)
以上から,対応する 2 組の辺の比とその間の角が等しいので,
⊿PCD∽⊿PEB　　　　相似中心は P ということになりますね。

問題 5

正五角形 ABCDE の対角線 CE,DB の交点を P とする。
このとき,
直線 BE と CD が平行であることを,
説明しなさい。
(2 直線 BE と CD とそれぞれ B,D で交わる
直線 DB を引いたとして
CD,EB を引いたものとして,
錯角が等しいならば EB と CD が平行であることを
使ってよいものとします。)
(問 4 の結果から⊿PCD∽⊿PEB を使いなさい.)



答え: (なにをアタリマエとするかによりますが,ターレスの切片定理でも,相似中心が P だからでも,同位角が等しいから平行でも自分が理解している適当な理由で説明してください。)
∠PCD=∠PEB より 錯角が等しいので
BE と CD は平行である。

問題 6

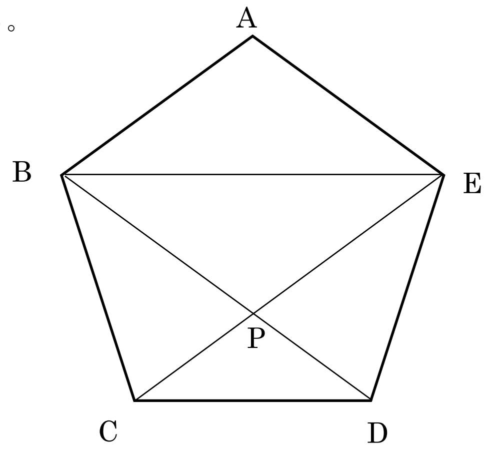
正五角形 ABCDE の対角線 CE,DB の交点を P とする。

このとき,

対角線 BE,BD が∠ABC を 3 等分することを

説明しなさい。

(問題 5 から⊿PCD∽⊿PEB は使って構いません)



答え

問 1 の結果から⊿ABE と⊿CDB は二等辺三角形であり,かつ合同であるから,

∠ABE=∠CBD=∠CDB…①

また,

問 5 から⊿PCD∽⊿PEB がいえるので

∠CDB=∠DBE・・・②

①②より

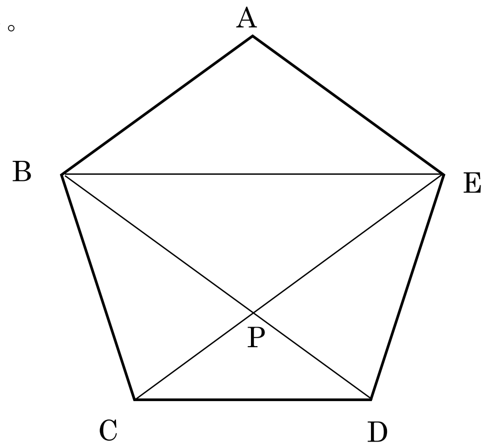
∠ABE=∠CBD=∠DBE

以上より対角線 BE,BD は∠ABC を 3 等分する。

もちろん,正五角形の定義②の 5 つの内角は等しいこと,および,先に証明した⊿ABE,⊿BDE,⊿CDB が二等辺三角形であることから,∠ABE=∠EBD=∠CBD=36° としても構いません。その場合は,正五角形の内角の和が 540° であること,1 つの内角が 108° であることを説明しておきましょう。

問題 7

正五角形 ABCDE の対角線 CE,DB の交点を P とする。
このとき,
⊿BCP∽⊿EBC であることを説明しなさい。



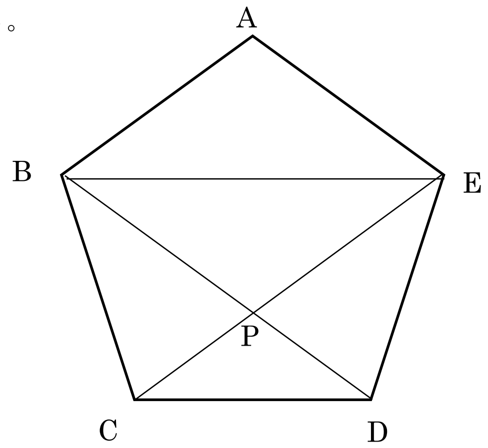
答え:
問 6 より∠BCE= 2 ×∠DCP…①
∠DCP+∠CDP=∠BPC・・・②
⊿PCD は二等辺三角形であるから,∠DCP=∠CDP・・・③
①②③より
⊿BCP は∠PCB,∠CPB を底角とする二等辺三角形である。
次に,⊿EBC は∠EBC=∠ECB を満たす二等辺三角形より,
よって対応する 2 角の大きさが等しいことから,
⊿BCP∽⊿EBC であることがいえる。

問題 8

正五角形 ABCDE の対角線 CE,DB の交点を P とする。

このとき,

$\frac{PC}{PE}=\frac{BC}{BE}$ となることを説明しなさい。



答え

問 7 の結果から⊿BCP∽⊿EBC であるから,

$$\frac{BC}{EB}=\frac{CP}{BC}$$

$BC=BP=EP$ より

$$\frac{BC}{EB}=\frac{CP}{EP}$$

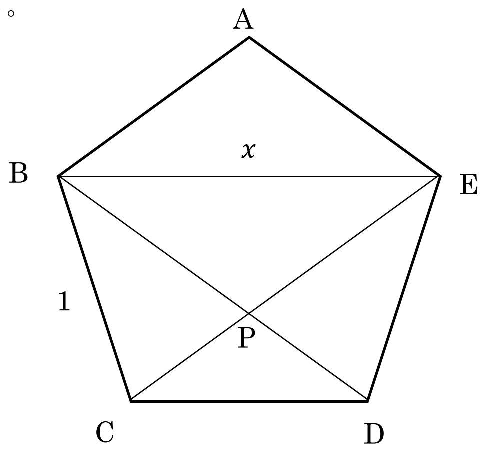
以上より

$$\frac{PC}{PE}=\frac{BC}{BE}\text{ となる。}$$

当然∠EBC について,角の 2 等分線の定理を利用しても構いません。

問題 9

正五角形 ABCDE の対角線 CE,DB の交点を P とする。
正五角形の一辺の長さが1であるとき,
対角線 BE の長さを$x\ (x>0)$とおく。
このときxを求めなさい。



答え

問 9 の結果から$\dfrac{PC}{PE}=\dfrac{BC}{BE}$

$CP=\dfrac{1}{x}$

$EB=EC=x$より

$EC-EP=CP$

$x-1=\dfrac{1}{x}$

$x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$なので

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

となります。

また,$CP=\dfrac{1}{x}=x-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$であることも確認しておきましょう。

今回は触れていませんが,四角形 ABPE がひし形であることも大切です。⊿ABE と⊿EAP が二等辺三角形であることを言えばいいでしょう。

さて,これまでのことから,CP と PE が作図できれば,⊿ACE や⊿CEB が作図できるので,ひとまず正五角形は作図できそうです。

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

ですから,$1+\sqrt{5}:2$ $(2:\sqrt{5}-1)$の比となる同一直線上の線分を書くことを目標にしましょう。

問題 10　$\sqrt{5}$を作図してみよう

$\sqrt{5}+1$にしろ,$\sqrt{5}-1$にしろ,$\sqrt{5}$が書ければあとは 1 を足し引きするだけですから楽にできるでしょう。まずは$\sqrt{5}$を作図してみましょう。

($\sqrt{5}$とは自分自身を 2 回掛けると 5 になる正の数とします。つまり,面積が 5 の正方形の一辺の長さです。)

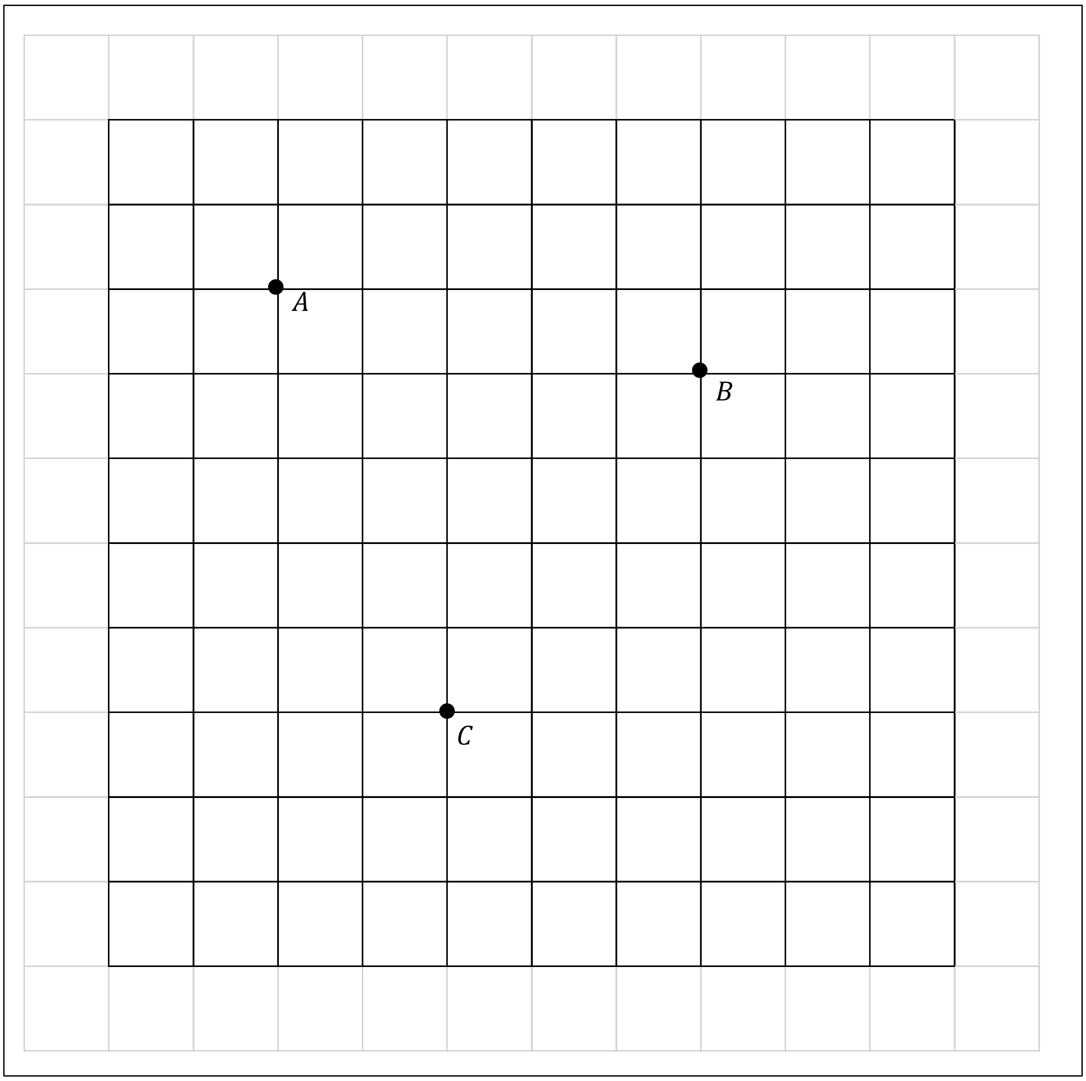
一辺の長さが 1 の正方形を単位格子とするような平面が与えられているとき,

(1)点 A を端点とする長さが$\sqrt{2}$の線分をすべて書きなさい。

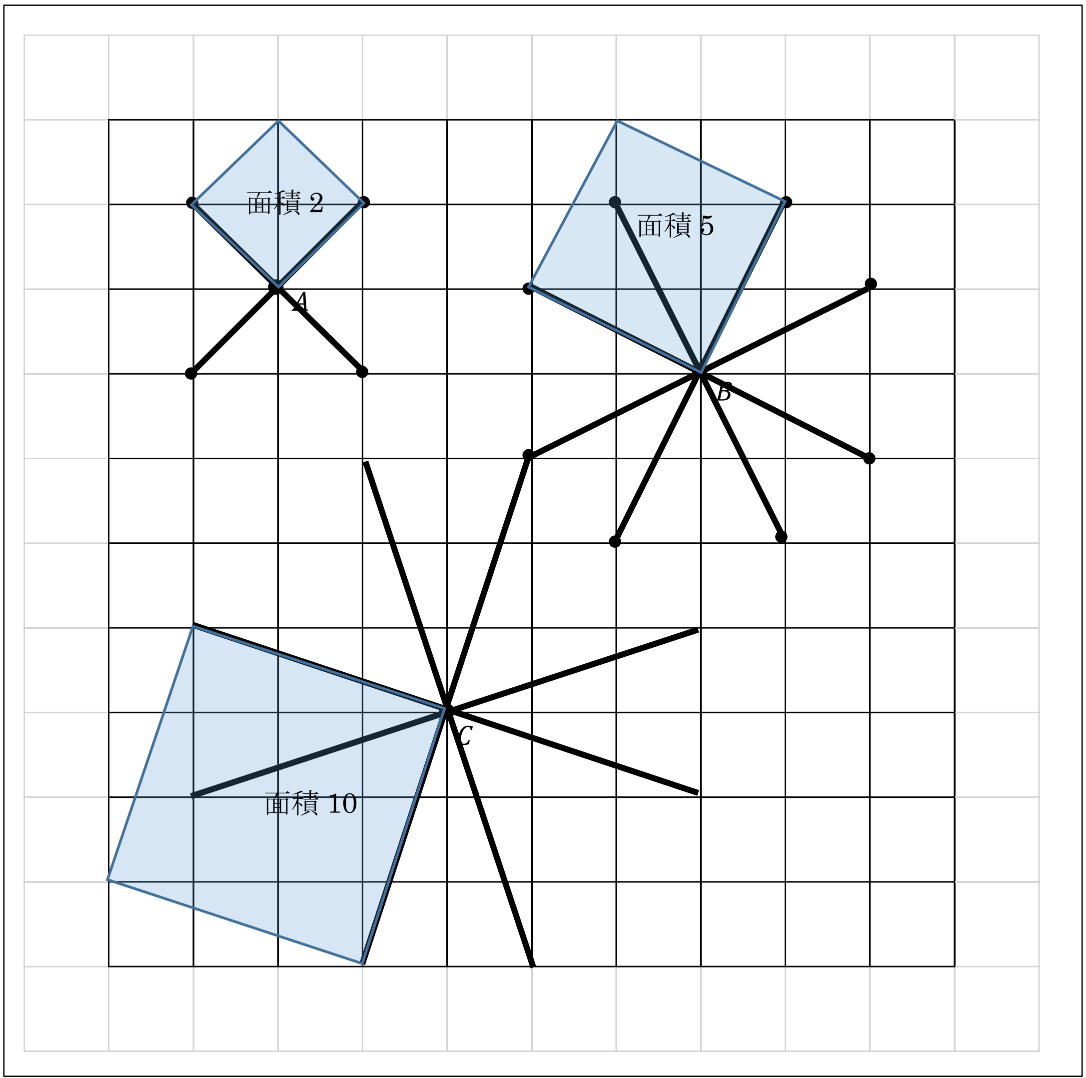
(2)点 B を端点とする長さが$\sqrt{5}$の線分をすべて書きなさい。

(3)点 C を端点とする長さが$\sqrt{10}$の線分をすべて書きなさい。

ただし,すべての点は格子上に存在するものとする。



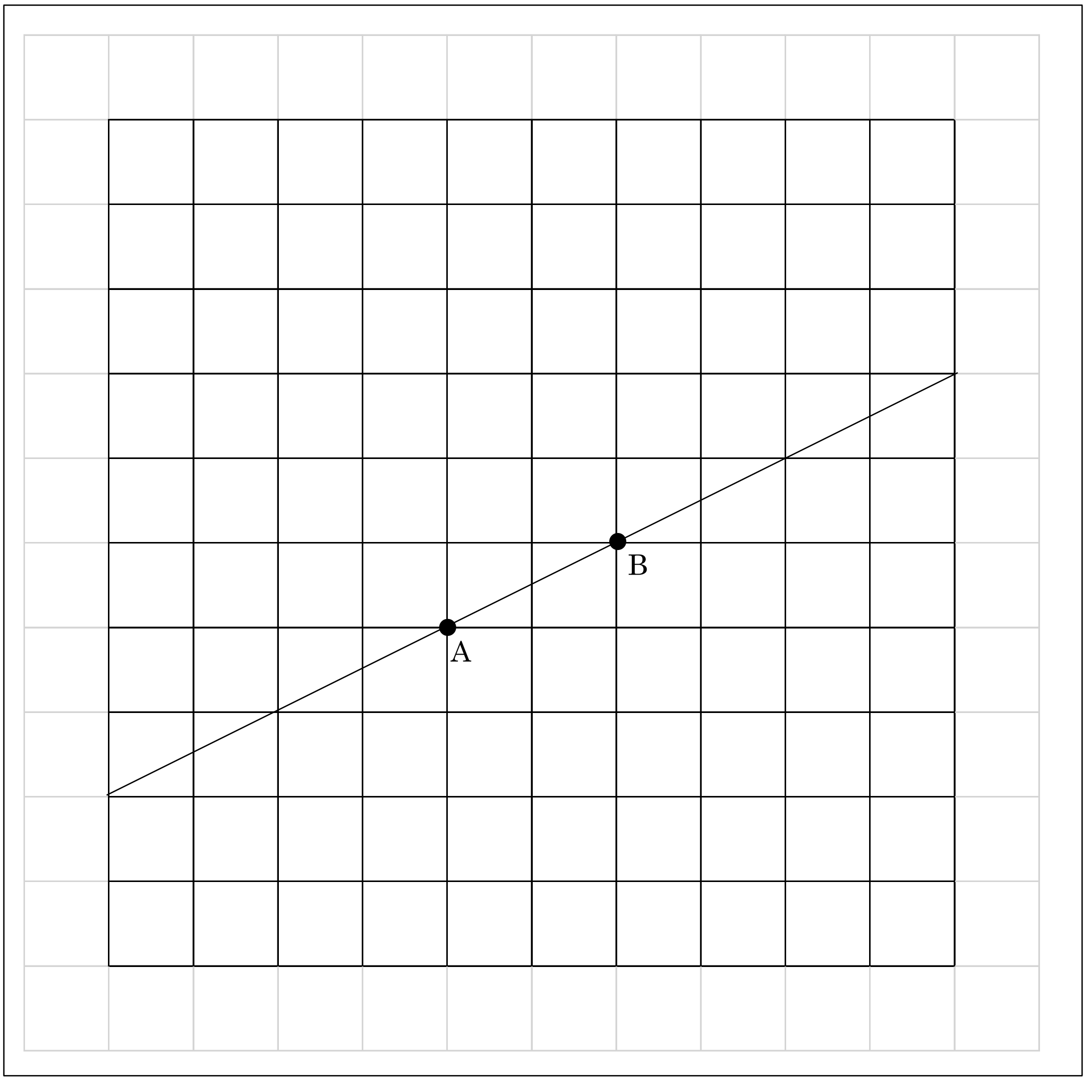
答え



問題 11　線分の長さの比が$1+\sqrt{5}:2$となるような 2 線分を作図してみよう
一辺の長さが 1 の正方形を単位格子とするような平面が与えられているとき,
単位格子を利用して,$\sqrt{5}$の長さの線分 AB を作図した。
このとき直線 AB 上において,

点 A から見て B と同じ方向に,AC の長さが$1+\sqrt{5}$となるような点 C

および,
点 A から見て,点 B と逆の方向に,AD の長さが 2 となるような点 D を,
コンパスを用いて書きなさい。ただし,点 C,D は格子上になくてもよいものとします。



答え

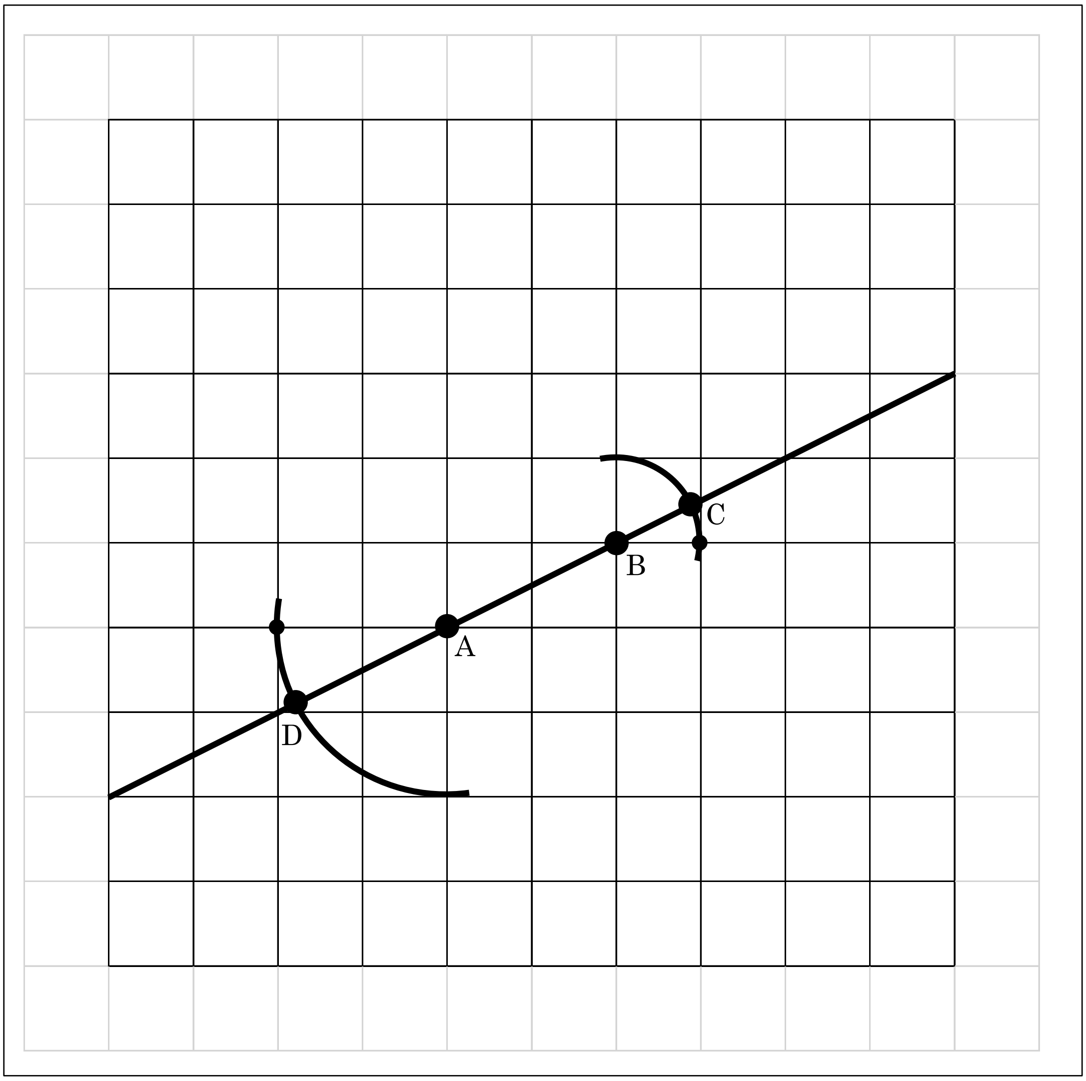
点 B を中心とし,格子点から半径 1 の長さを取って円弧を書く。

このとき,円弧と直線 AB の交点で,点 A と逆側の点が C である。

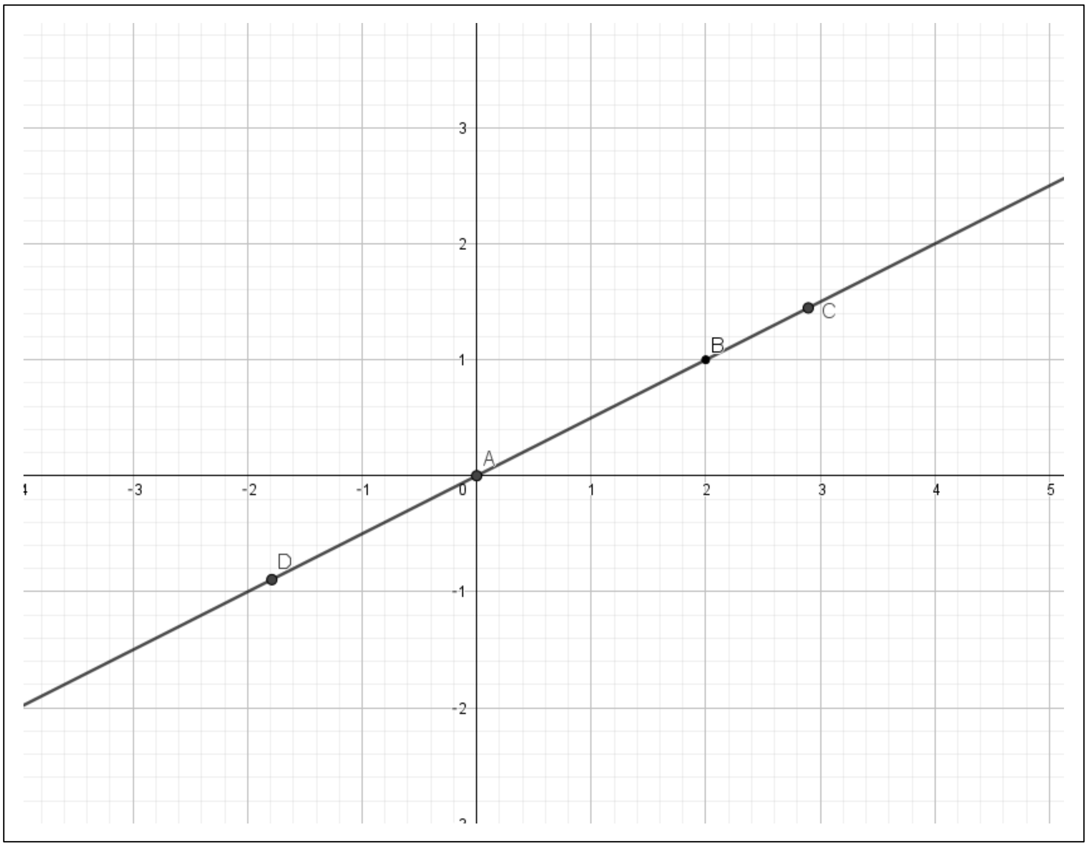
次に,

点 A を中心とし,格子点から半径 2 の長さを取って円弧を書く。

このとき,円弧と直線 AB の交点で,点 C と逆側の点が D となる。



問題 12　格子を利用して正五角形を書いてみよう
問 11 の結果を利用し,正五角形を作図してみましょう。
難しい人は問題 9 に帰って⊿ACE を見直しましょう。

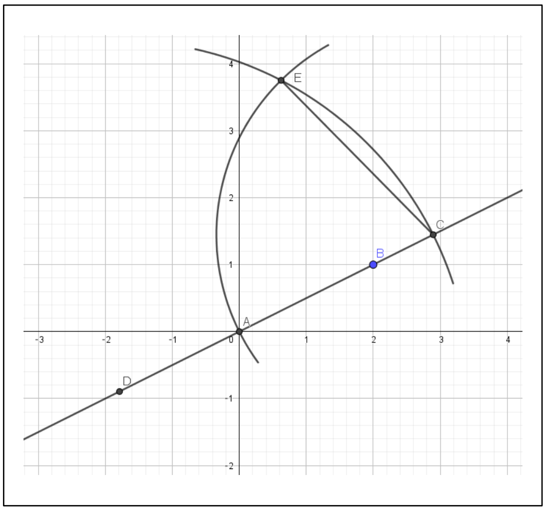


答え

点 D を中心とし,DC を半径とする弧を書く

点 C を中心とし,CA を半径とする弧を書く

二つの円弧の交点を E とし CE を結ぶ

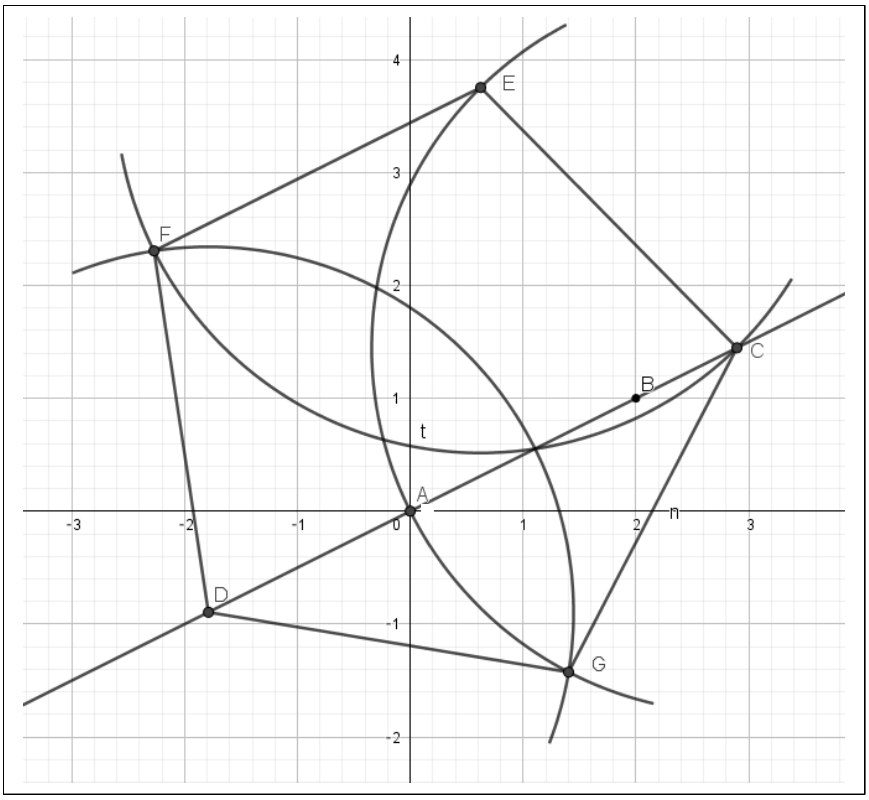


点 E を中心とし,EC の長さを半径とする弧を書く　C_1

点 C を中心とし,CE の長さを半径とする弧を書く　C_2

点 D を中心とし,CE の長さを半径とする弧を書く　C_3

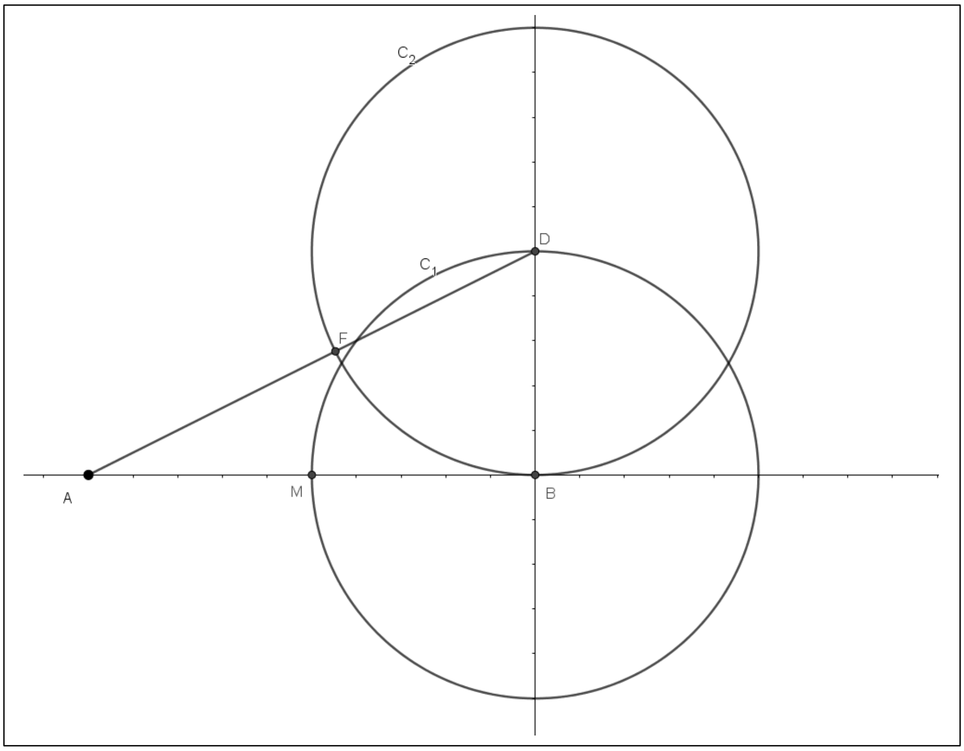
C_1とC_3　,C_2とC_3の交点を下図のように, F,G とし,EF,FD,DG,GC を結ぶ



あまり補助線の数を増やしたくないので,DE は結んでいませんが,慣れるまでは線分 DE を結んで二等辺三角形 DCE を作っておけば,混乱しないと思います。

問題 13 線分の長さの比が$\frac{\sqrt{5}-1}{2}:1$となるような線分を作図してみよう②

長さが 1 の線分 AB を与える。AB の中点を M とし,BM を半径とする円C_1を画く。
点 B を通り直線 AB に垂直な直線と,C_1の交点を D とし,D を中心とし線分 DB を半径とする円C_2を画く。線分 AD とC_2の交点を F とする。
このとき,AF と FD の長さを求めなさい。



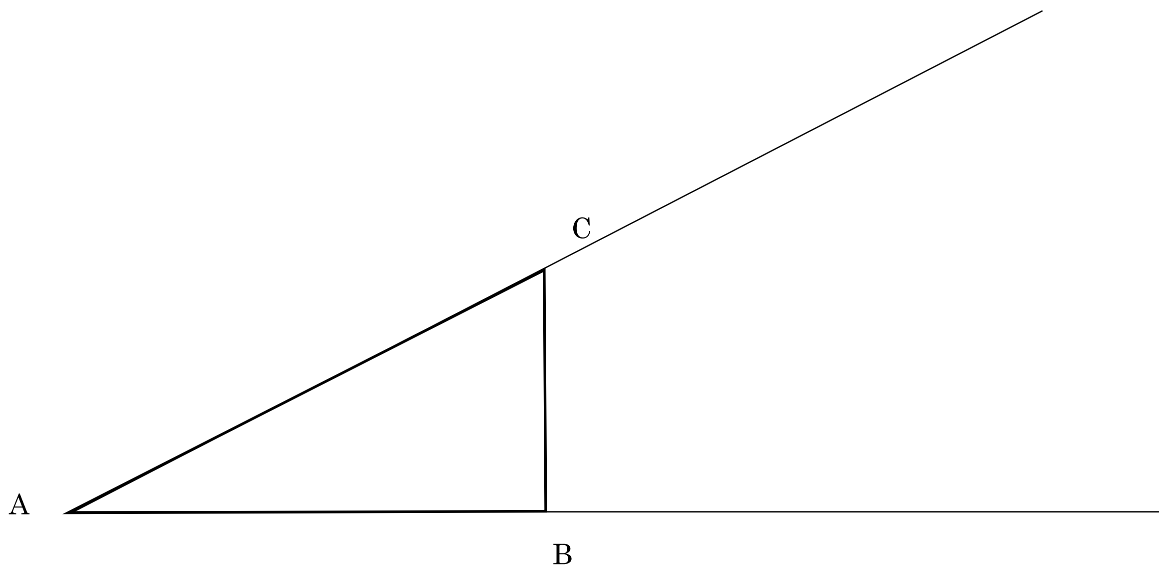
問題 14 線分の長さの比が$\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}:1$となるような線分を作図してみよう③

∠B=90°,AB=2,BC=1 である直角三角形 ABC を与える。このとき,∠C の二等分線および、∠C の外角の二等分線を書きなさい。

∠C の内角および外角の二等分線と直線 AB との交点をそれぞれ D, E とする。

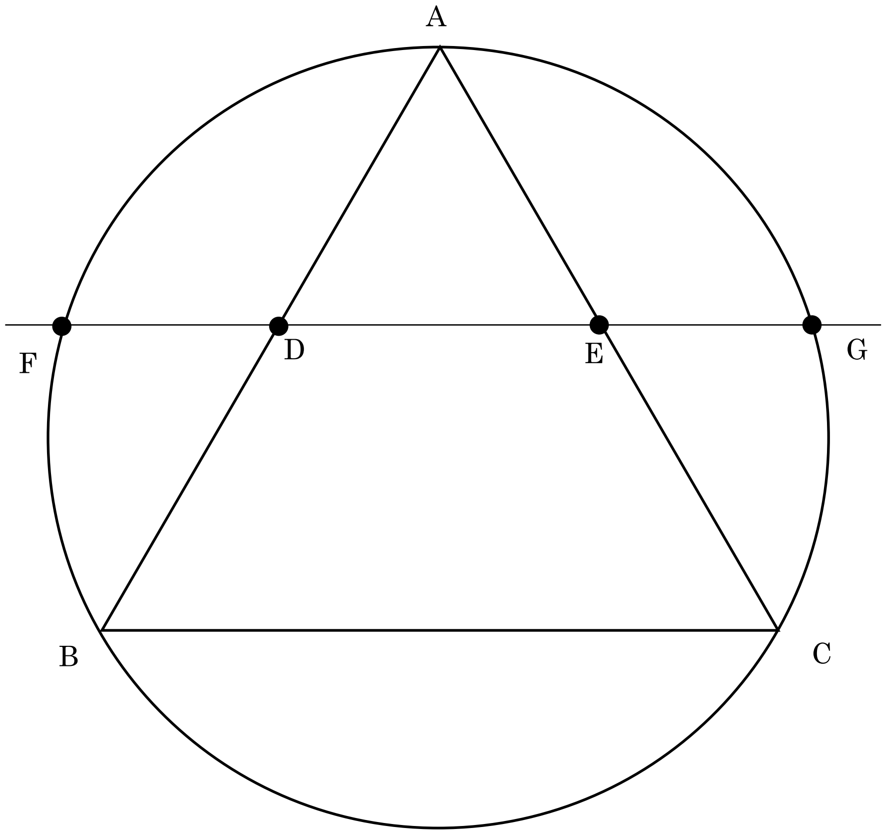
このとき,BD,BE の長さを求めなさい。

(三角形の角の二等分線の定理は知っているものとします。)



問題 15 線分の長さが$\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}:1$となるような線分を作図してみよう④

円に内接する一辺の長さが 2 である正三角形 ABC を与える。線分 AB,CA の中点をそれぞれ D,E とし、直線 DE と円の交点を F,G とする。このとき、FD,DG の長さを求めよ。
(方べきの定理を知らない場合は,円 ABC に関する円周角の定理から FD と DG を辺に持つような相似な三角形を見つけてみましょう。)



問題 16　　自由に作図しよう

ここまでの内容を理解した上で、正五角形を幾つかの方法で作図しなさい。

また,作図完了後に

ネットで正五角形の書き方を検索してみて,内容が理解できる。または友達に説明することが出来れば十分だと思います。

また,角度および内接円,外接円との関係,や正 12 面体,正 20 面体についてのまとめは,授業中に行います。