■積分の平均値の定理

2005 年　信州大（理・医）前期試験で次のような問題が出題されました。

あるマラソン選手は出発地点から 40 ㎞の地点をちょうど 2 時間で走った。このとき、途中のある 3 分間でちょうど 1 ㎞の距離を進んだことを説明せよ。

40 ㎞の距離を 2 時間で走ったから、20 ㎞/時 ＝ 分速 20/60 = 1/3 (㎞/分)ということになります。
ということは「平均すると 3 分間で 1 ㎞の距離を進んだ」とは言えます。
しかし、「3 分間でちょうど 1 ㎞の距離を進んだ」区間が実際にあったかどうかは、わかりません。

分速 1/3 ㎞より速く走った瞬間もあるだろうし、息切れして分速 1/3 ㎞よりペースダウンした瞬間もあったけれど、トータルしたら平均して 3 分間で 1 ㎞の距離を進んでいた。
速く走った瞬間と、遅く走った瞬間は連続的に起こっていて、どこかの 3 分間を切り取ったら、ちょうど 1 ㎞の距離を進んでいた区間があった。

直感的にはそんな区間がありそうだと思えます。しかし、それをどのように説明すればよいでしょうか。

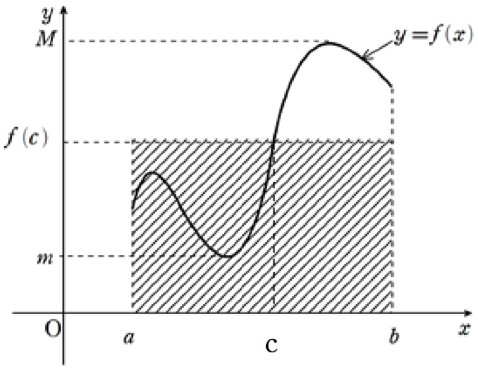
このような時に役に立つのが「積分の平均値の定理」です。
この定理は教科書でも参考書でもさらっと紹介されるだけなので手薄になりやすく、それゆえ入試問題で時々出題されます。
1999 年 京大理系（後期）ではズバリこの定理を証明する問題が出題されました。

(1) $f(x)$ は a ≦ x ≦ b で連続な関数とする。このとき

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \quad a \leqq x \leqq b$$

となる c が存在することを示せ。

これはグラフを書いてみればものすごく明らかな関係のように見えます。



この図を見ると、関数 $f(x)$ が連続であれば $\int_a^b f(x)dx$ が表す面積と、長方形（b−a)$f(c)$ の面積が等しくなるような c が存在することは自明のように思えます。

（これが直感的に「積分の平均値の定理」が保証する内容です）

＜証明＞

a≦x≦b の範囲で $f(x)$ の最大値をM、最小値をmとすると

m≦ $f(x)$ ≦M　（a≦x≦b）である

すると $\int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M\,dx$ となる

したがって、m(b−a)≦ $\int_a^b f(x)dx$ ≦M(b−a)

この各辺をb−a(＞0)で割ると

m≦ $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ≦M となる

ここでk= $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ とおくと、m≦k≦Mより、中間値の定理(*)から

k= $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$　（a≦c≦b）となるcがaとbの間に存在する。

(*)中間値の定理…？という人は教科書などで確認を！

さて、信州大の入試問題に戻ります。

時刻t分 $(0 \leqq t \leqq 120)$ における、そのマラソン選手の速度を $v(t)$ km/分とすると

$\int_0^{120} v(t)dt = 40$ だから

積分の平均値の定理より $\frac{1}{120}\int_0^{120} v(t)dt = v(a)$ $(0 < a < 120)$ を満たすaが

少なくとも一つ存在する。

したがって $v(a) = \frac{1}{3}$ …① を満たすaが存在すると言える。

次に、積分の平均値の定理は「関数 $f(x)$ が連続であれば $\int_a^b f(x)dx$ が表す面積と、長方形 $(b-a)f(c)$ の面積が等しくなるような c がaとbの間に存在する」ということだから

$T \leqq a \leqq T+3$ $(0 \leqq T \leqq 117)$ を満たすようなT , a について

$\int_T^{T+3} v(t)dt = 3 \cdot v(a)$ …② が成り立つ

①,②より $\int_T^{T+3} v(t)dt = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ $(0 \leqq T \leqq 117)$ となるような実数Tが存在すると言える。

すなわち、このマラソン選手は途中のある3分間でちょうど1kmの距離を進んだことが示された。

問題文の問いが「説明せよ」ということであるので、上記のように説明をしました。

$$v(a) = \frac{1}{3} \text{ …①}$$

を満たす a が存在することをどのように説明するか。

$$\int_T^{T+3} v(t)dt = 3 \cdot v(a) \text{ …②}$$

を満たすような実数 T が区間内に存在することをどのように説明するか。

そこに工夫が必要である問題でした。

積分の平均値の定理は時に有効な武器になるので理解しておいてください。