■　一山くずしゲームの必勝法

「三山くずし」というゲームがあります。
石を何個かずつ3つの山にまとめておいて、2人で交互にどれか一つの山から、ある個数制限内で好きな個数の石を取っていって、最後の石を取った方が勝ち（または負け）というゲームです。

このゲームには「必勝法」が存在します。
調べれば調べるほど代数の不思議な関係が浮かび上がってきて、とても興味深く、とても深い世界があることを発見するでしょう。

興味がある人は調べてみると面白いですよ。

※ちょっと難しいかもしれませんが
『ゲームにひそむ数理 - ゲームでみがこう!!数学的センス』秋山仁・中村義介　森北出版　1968
『ゲームと競技の数学 - 遊びのサイエンス』J.D.ビースリー　サイエンス社　1992
『石取りゲームの数学 - ゲームと代数の不思議な関係』佐藤文広　数学書房　2014
というような本があります。

そして、この「山くずしゲーム」は大学入試でも出題されています。
「三山くずし」ではなく単純にするために「一山くずし」に、そして石がカードになっていますが1983年に芝浦工大で出題されました。
小学生の知識で解くことができます。ぜひ考えてみてください。

1983年　芝浦工大

n 枚のカードを並べておいて、2人でゲームをする。
「交互に1枚以上5枚以下のカードを取り続け、最後にカードを取る方を負けとする」

(1) $n=7$ のとき、後手は必ず勝てることを示せ。
(2) $n=52$ のとき、先手が勝つためには1手目に何枚とればよいか。
(3) (1)(2)の結果を n 枚の場合に一般化すると、どのような n に対してどのような必勝法があるか。ただし $n \geqq 2$ とする。

(1) よくわからなければ実験をしてみたらすぐに理解できます。

(先手が取る枚数 , 後手が取る枚数 , 先手が取る枚数)を書き出してみます。

(１, ５, １) 先手１枚のとき、後手が５枚取れば、先手は１枚を取らざるをえないので後手が勝ちます。

先手は最初１枚から５枚とることができるので、そのすべてを書き出してみると
(２, ４, １)(３, ３, １)(４, ２, １)(５, １, １)となって後手が必ず勝ちます。

先手が x 枚($1 \leqq x \leqq 5$)取るとすると、後手は 6－x 枚取れば、場に必ず１枚だけ残すことができるので後手は必ず勝つことができます。

(2) (1)で考えたことがヒントになります。

先手がカードを取った後、場に１枚だけカードが残るようにすればいいですよね。

先手が１手目に a 枚($1 \leqq a \leqq 5$)取ったとします。

次に後手が x 枚取れば、先手が 6－x 枚取るようにするのです。

つまり、

a →（ x , 6－x ）→（ x , 6－x ）→・・・(繰返す)・・・→（ x , 6－x ）→ 1

となれば、

先手 →（後手,先手）→（後手,先手）→・・・(繰返す)・・・→（後手,先手）→ 後手

となりますから、後手の負け、先手が勝ちます。

ということは、$a + \underline{6 + 6 + \cdots + 6} + 1 = 52$ という関係が成り立てば良いということになります。

6 が m 個あるとすると、$a + 6m + 1 = 52$ つまり $51 = 6m + a$ となって

51 を 6 で割ったときの余りが a ということだから、$a = 3$ となります。

<u>先手が１手目に３枚取れば、先手が必ず勝ちます（答）</u>

このとき $m = 8$ です。

先手が最初に３枚取って（ 後手 , 先手 ）=（ x , 6－x ）を８回繰り返せば先手が必ず勝つということですね。

(3) (1)で得られた情報は、$n = 7$ のときは<u>後手に必勝法</u>があるということ。

それは先手が取った枚数に加えて 6 になるように後手が取れば良いということです。

(2)で得られた情報は２つです。$n = 52$ のときは<u>先手に必勝法</u>があるということ。

その必勝法は、先手がまず何枚か取って、(後手の取る枚数＋先手の取る枚数)＝6 を繰り返すということです。

そうすると次に考えるべきことは、先手は最初に何枚取ればよいかということです。
ひらめかなければ具体的に調べてみましょう。実験です！

＊以下で使う記号の説明です。

「51 を 6 で割った余りが 3」ということを「$51 \equiv 3 \pmod 6$」と書きます。

(2)で考えたことを　整理すると、

・$n = 52$ のとき、52 枚のうち最後に 1 枚を残すから、残りの 51 枚について考える。$51 \equiv 3 \pmod 6$だから、余りの 3 枚を最初に取って、その後（後手＋先手）の枚数が 6 枚になるような取り方を繰り返していけば、先手に必勝法があるということでした。

そこで n=52 の周辺を調べてみましょう。

・$n = 49$ のとき、1 枚を残した 48 枚について考える。$48 \equiv 0 \pmod 6$です。
6 で割った余りが 0 だから先手の最初に取るべき枚数は 0 枚？ということになります。
これはどういうことかというと、先手には必勝法がないということなのです。
後手の立場に立つと、(先手の取る枚数＋後手の取る枚数) = 6 となるように 8 回繰り返せば場には 1 枚カードが残り、それを先手が取ることになるので、後手に必勝法が存在することになります。

・$n = 50$ のとき、1 枚を残すと 49 枚で、$49 \equiv 1 \pmod 6$となります。
先手は最初に 1 枚取り、続いて(後手の取る枚数＋先手の取る枚数) = 6 となるように 8 回繰り返せば場には 1 枚カードが残り、それを後手が取ることになるので、先手に必勝法が存在することになります。

・$n = 51, 53, 54$ のときも同様にして、
それぞれ、$50 \equiv 2 \pmod 6$ ，$52 \equiv 4 \pmod 6$ ，$53 \equiv 5 \pmod 6$ となります。
そうすると、先手はそれぞれ最初に 2 枚、4 枚、5 枚を取り、
(後手の取る枚数＋先手の取る枚数) = 6 となるように 8 回繰り返せば、場に 1 枚残すことができて、それを後手が取ることになるので先手に必勝法が存在することになります。

n=49 から n=54 まで、それぞれ 1 枚を残した 48 枚から 53 枚まで（6 で割った余りが 0 から 5 まで）一周調べた結果、6 で割って余りが 0 のときだけ後手に必勝法が存在し、それ以外は先手に必勝法が存在するということがわかりました。

以上をまとめると、
n＝6k+1 (k は自然数)のとき、つまり n－1 が 6 の倍数のとき、後手に必勝法があり、
後手は、先手が最初に何枚取っても、(先手の取る枚数＋後手の取る枚数)＝6　となるように取り続ければよい。

n＝6k+r (k は 0 以上の整数 , r は 2 ≦ r ≦ 6 の整数)のとき、
つまり n－1 が 6 の倍数ではないとき、先手に必勝法があり、
先手は最初に r－1 枚取り、その後 (後手の取る枚数＋先手の取る枚数)＝ 6 となるように取り続ければよい。